Statistical Process Control

ESERCIZI

Esercizio 1. Per la caratteristica di un processo distribuita gaussianamente sono note media e deviazione standard: $\mu = 100$, $\sigma = 0.2$.

1a. Calcolare la linea centrale (centerline) e i limiti di controllo (LCL, UCL) della carta di Shewart con sottogruppi aventi numerosità $n = 5$.

$$centerline = \mu = 100$$
$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0.2}{\sqrt{5}} = 0.089$$
$$UCL = \mu + 3\sigma_{\bar{X}} = 100 + 3 \cdot 0.089 = 100.27$$
$$LCL = \mu - 3\sigma_{\bar{X}} = 100 - 3 \cdot 0.089 = 99.73$$

1b. Calcolare la linea centrale (centerline) e i limiti di controllo (LCL, UCL) della carta X.

$$centerline = \mu = 100$$
$$LCL = \mu - 3\sigma = 100 - 3 \cdot 0.2 = 99.4$$
$$UCL = \mu + 3\sigma = 100 + 3 \cdot 0.2 = 100.6$$

1c. Calcolare l'Average Run Length (ARL) per la carta $\bar{X}$ e per la carta X.
(ARL = numero medio di punti disegnati sulla carta prima di avere un punto fuori dai limiti di controllo anche se il processo è in controllo statistico).

$$\alpha = P(\text{falso allarme}) = P\left(\left|\bar{X} - \mu\right| > 3\sigma_{\bar{X}}\right) = 0.0027$$

per la gaussianità. Segue che

$$ARL = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0.0027} = 370.$$

Lo stesso vale per la carta X, sempre per la gaussianità.

1d. Sapendo che i limiti di specifica sono $LSL = 98.2$, $USL = 100.6$, calcolare C_p e C_{pk}.

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma} = \frac{100.6 - 98.2}{6 \cdot 0.2} = 2$$

$$C_{pk} = \min\left\{\frac{USL - \mu}{3\sigma}, \frac{\mu - LSL}{3\sigma}\right\} = \min\left\{\frac{100.6 - 100}{0.6}, \frac{100 - 98.2}{0.6}\right\} = \min\left\{1, \frac{0.8}{0.6}\right\} = 1$$

$C_p \neq C_{pk} \Rightarrow$ il processo non è centrato, è capace e produce entro le tolleranze.

Esercizio 2. Si consideri una caratteristica gaussiana. I dati vengono raccolti in sottogruppi di numerosità $n = 6$. Dall'analisi di 10 sottogruppi raccolti in Fase I, risulta

$$\bar{\bar{X}} = 100 \quad ; \quad \bar{s} = 3$$

2a. Calcolare i limiti di controllo (LCL, UCL) della carta $\bar{X}$.

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}} = \frac{\frac{\bar{s}}{c_4}}{\sqrt{n}} = \frac{\frac{3}{0.9515}}{\sqrt{6}} = 1.287$$

$$UCL_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} + 3\hat{\sigma}_{\bar{X}} = 100 + 3 \cdot 1.287 = 103.86$$

$$LCL_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} - 3\hat{\sigma}_{\bar{X}} = 100 - 3 \cdot 1.287 = 96.14$$

2b. Calcolare i limiti di controllo (LCL, UCL) della carta s.

$$UCL_s = B_4 \cdot \bar{s} = 1.97 \cdot 3 = 5.91$$

$$LCL_s = B_3 \cdot \bar{s} = 0.03 \cdot 3 = 0.09$$

2c. Supponendo che tutti i punti cadano entro i limiti di controllo in entrambe le carte precedenti, determinare i limiti della variabilità naturale del processo.

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{s}}{0.9515} = \frac{3}{0.9515} = 3.1529$$

$$\text{Limite inf.} = \mu - 3\sigma \simeq \bar{\bar{X}} - 3\hat{\sigma} = 100 - 3 \cdot 3.1529 = 90.5413$$

$$\text{Limite sup.} = \mu + 3\sigma \simeq \bar{\bar{X}} + 3\hat{\sigma} = 100 + 3 \cdot 3.1529 = 109.4587$$

2d. Sapendo che i limiti di specifica sono $LSL = 90$, $USL = 110$, calcolare C_p e C_{pk}.

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma} \simeq \frac{USL - LSL}{6\hat{\sigma}} = \frac{110 - 90}{6 \cdot 3.1529} = \frac{20}{18.9174} = 1.0572$$

$$C_{pk} = \min\left\{\frac{USL - \mu}{3\sigma}, \frac{\mu - LSL}{3\sigma}\right\} = \min\left\{\frac{110 - 100}{3 \cdot 3.1529}, \frac{100 - 90}{3 \cdot 3.1529}\right\} = 1.0572$$

2e. Dire, motivando la risposta se la percentuale di scarti è superiore a 3/1000.

Poiché $C_p = C_{pk}$, il processo è centrato e in più è gaussiano per ipotesi. Per processi centrati e gaussiani, la percentuale di scarti per $C_p = 1$ è circa 3/1000 (precisamente 0.0027). Nel nostro caso $C_p > 1$, perciò la percentuale di scarti sarà inferiore a 3/1000.

Esercizio 3. Sottogruppi di dimensione $n = 6$ sono presi a intervalli regolari da un processo manifatturiero. Una caratteristica distribuita normale è misurata e i valori di $\bar{X}$ e s sono calcolati per ogni campione. Dopo aver analizzato 50 sottogruppi, risulta che

$$\sum_{i=1}^{50} \bar{X}_i = 1000 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{50} s_i = 75.$$

3a. Calcolare i limiti di controllo per le carte $\bar{X}$ e s.

Per la carta s:

$$\bar{s} = \frac{\sum_{i=1}^{50} s_i}{50} = \frac{75}{50} = 1.5$$

$$UCL_s = B_4 \cdot \bar{s} = 1.97 \cdot 1.5 = 2.955 \quad ; \quad LCL_s = B_3 \cdot \bar{s} = 0.03 \cdot 1.5 = 0.045.$$

Per la carta $\bar{X}$:

$$UCL = \bar{\bar{X}} + 3\hat{\sigma}_{\bar{X}} \quad ; \quad LCL = \bar{\bar{X}} - 3\hat{\sigma}_{\bar{X}}$$

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=1}^{50} \bar{X}_i}{50} = \frac{1000}{50} = 20$$

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}} = \frac{\frac{\bar{s}}{c_4}}{\sqrt{n}} = \frac{\frac{1.5}{0.9515}}{\sqrt{6}} = 0.6436$$

$$UCL = \bar{\bar{X}} + 3\hat{\sigma}_{\bar{X}} = 20 + 3 \cdot 0.6436 = 21.9308$$

$$LCL = \bar{\bar{X}} - 3\hat{\sigma}_{\bar{X}} = 20 - 3 \cdot 0.6436 = 18.0692$$

3b. Supponendo che tutti i punti cadano entro i limiti di controllo per entrambe le carte precedenti, determinare i limiti della variabilità naturale del processo.

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{s}}{c_4} = \frac{1.5}{0.9515} = 1.5765$$

$$\text{Limite inf.} = \mu - 3\sigma \simeq \bar{\bar{X}} - 3 \cdot \hat{\sigma} = 20 - 3 \cdot 1.5765 = 15.2705$$

$$\text{Limite sup.} = \mu + 3\sigma \simeq \bar{\bar{X}} + 3 \cdot \hat{\sigma} = 20 + 3 \cdot 1.5765 = 24.7295$$

3c. Sapendo che i limiti di specifica sono 19 ± 4, che cosa si può dire circa la capacità del processo di produrre entro i limiti di specifica?

$$USL = 19 + 4 = 23 \quad ; \quad LSL = 19 - 4 = 15$$

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma} = \frac{23 - 15}{6 \cdot 1.5765} = 0.8458 < 1$$

Poiché $C_{pk} \leq C_p < 1$, possiamo dire che il processo non è capace e non produce entro le tolleranze.

Esercizio 4. Una carta $\bar{X}$ è utilizzata per controllare la media di una caratteristica di qualità distribuita normale. E' noto che $\sigma = 6$, $n = 4$, centerline = 200, $UCL = 209$ e $LCL = 191$. Se la media del processo si sposta a 188, trovare la probabilità che lo spostamento sia rilevato al primo campione dopo lo spostamento.

La media passa da 200 a 188 e ha uno spostamento pari a 2 volte la deviazione standard: $200 - 188 = 2 \cdot \sigma$.

$$\beta = \Phi(3 - k\sqrt{n}) - \Phi(-3 - k\sqrt{n}) = \Phi(3 - 2\sqrt{4}) - \Phi(-3 - 2\sqrt{4}) = \Phi(-1) - \Phi(-7) = 0.1587 - 0$$

La probabilità che lo spostamento sia rilevato al primo campione dopo lo spostamento è

$$1 - \beta = 1 - 0.1587 = 0.9413$$

Esercizio 5. Un processo è monitorato e mostra i seguenti valori: $\mu = 10$ e $\sigma = 2.5$. La dimensione dei campioni è 3.

5a. Trovare la centerline e i limiti di controllo per la carta $\bar{X}$.

$$centerline = \mu = 10$$

$$UCL = \mu + 3\sigma_{\bar{X}} \quad ; \quad LCL = \mu - 3\sigma_{\bar{X}}$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2.5}{\sqrt{3}} = 1.4434$$

$$UCL = \mu + 3\sigma_{\bar{X}} = 10 + 3 \cdot 1.4434 = 14.3302$$

$$LCL = \mu - 3\sigma_{\bar{X}} = 10 - 3 \cdot 1.4434 = 5.6698$$

5b. Trovare la centerline e i limiti di controllo per la carta s.

$$centerline = \sigma = 2.5$$
$$UCL = B_4 \cdot \sigma = 2.568 \cdot 2.5 = 6.42$$
$$LCL = B_3 \cdot \sigma = 0 \cdot \sigma = 0$$

Esercizio 6. Supponiamo di avere misurazioni di una caratteristica distribuita normale e di sapere che

$$\sum_{i=1}^{50} x_i = 50 \quad ; \quad \sum_{i=2}^{50} MR_i = 20$$

Calcolare centerline e limiti di controllo della carta X e della carta MR supponendo di essere nella fase I.

Carta X:

$$\text{centerline} = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{50} x_i}{50} = \frac{50}{50} = 1$$

Carta MR:

$$\text{centerline} = \overline{MR} = \frac{\sum_{i=1}^{50} MR_i}{49} = \frac{20}{49} = 0.4082$$

Carta X:

$$\hat{\sigma} = \frac{\overline{MR}}{1.128} = 0.3619$$
$$UCL = \bar{X} + 3 \cdot \hat{\sigma} = 1 + 3 \cdot 0.3619 = 2.0856$$
$$LCL = \bar{X} - 3 \cdot \hat{\sigma} = 1 - 3 \cdot 0.3619 = -0.0857$$

Carta MR:

$$LCL_{MR} = 0 \quad ; \quad UCL_{MR} = 3.267 \cdot \overline{MR} = 3.267 \cdot 0.4082 = 1.3336$$

Esercizio 7. Le carte di controllo $\bar{X}$ e R sono utilizzate per controllare la resistenza alla rottura di una parte metallica. Si supponga che la resistenza alla rottura sia distribuita normale. 30 campioni di dimensione $n = 6$ sono raccolti in un certo periodo di tempo e forniscono i seguenti risultati:

$$\sum_{i=1}^{30} \bar{X}_i = 6000 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{30} R_i = 150$$

Calcolare i limiti di controllo per le carte $\bar{X}$ e R.

Carta $\bar{X}$:

$$centerline = \bar{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=1}^{30} \bar{X}_i}{30} = \frac{6000}{30} = 200$$

Carta R:

$$centerline = \bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^{30} R_i}{30} = \frac{150}{30} = 5$$

Limiti di controllo carta $\bar{X}$:

$$UCL = \bar{\bar{X}} + A_2 \cdot \bar{R} = 200 + 0.483 \cdot 5 = 202.415$$

$$LCL = \bar{\bar{X}} - A_2 \cdot \bar{R} = 200 - 0.483 \cdot 5 = 197.585$$

Limiti di controllo carta R:

$$UCL_R = D_4 \cdot \bar{R} = 2.004 \cdot 5 = 10.02 \quad ; \quad LCL_R = D_3 \cdot \bar{R} = 0 \cdot 5 = 0$$

Esercizio 8. Per controllare un processo viene utilizzata una carta di controllo di tipo $\bar{X}$ con limiti di controllo $\pm 3\sigma$, $UCL = 21.3$ e $LCL = 19.7$. La numerosità dei campioni è pari a 6. Sapendo che la specifica per la variabile di processo controllata è di 20 ± 2, determinare gli indici di capacità di processo C_p e C_{pk}.

$$USL = 22 \quad ; \quad LSL = 18$$

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma}$$

$$\begin{cases} 21.3 = \mu + 3\frac{\sigma}{\sqrt{6}} \\ 19.7 = \mu - 3\frac{\sigma}{\sqrt{6}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 21.3 = 19.7 + 6\frac{\sigma}{\sqrt{6}} \\ \mu = 19.7 + 3\frac{\sigma}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$\sigma = \frac{21.3 - 19.7}{6}\sqrt{6} = 0.6532 \quad ; \quad \mu = 19.7 + 3\frac{0.6532}{\sqrt{6}} = 20.5$$

$$C_p = \frac{22 - 18}{6 \cdot 0.6532} = 1.0206$$

$$C_{pk} = \min\left\{\frac{USL - \mu}{3\sigma}, \frac{\mu - LSL}{3\sigma}\right\} = \min\left\{\frac{22 - 20.5}{3 \cdot 0.6532}, \frac{20.5 - 18}{3 \cdot 0.6532}\right\}$$
$$= \min\{0.7655, 1.2758\} = 0.7655$$

Il processo è appena capace di produrre, non centrato e non produce entro le tolleranze.