Statistical Process Control

ESERCIZI II

Esercizio 1. Una ditta che produce schermi a cristalli liquidi deve tenere in controllo il numero di pixel non funzionanti. Vengono ispezionati venti schermi alla volta e viene registrato il numero di pixel difettosi. In Fase I, la media e la varianza del numero di pixel non funzionanti trovati nelle ispezioni sono: $\mu = 36.76$ e $\sigma^2 = 40.32$.

(a) Valutare, mediante il test di dispersione (con significatività $\alpha = 5\%$) se l'ipotesi di distribuzione di Poisson deve essere respinta.

Se la media e la varianza riportate nel testo sono esatte, allora i dati non possono essere Poissoniani perchè la media è diversa dalla varianza. Se, invece, sono una stima basata su un certo numero N di ispezioni, allora è necessario conoscere tale numero per effettuare il test di dispersione. Supponendo $N = 20$ si ha

$$\xi = \frac{(N-1)S^2}{\bar{X}} = \frac{19 \cdot 40.32}{36.76} = 20.84.$$

Inoltre,

$$\chi^2_{0.025,19} = 32.85 \qquad \chi^2_{0.975,19} = 8.91.$$

Segue che

$$\xi \in [8.91, 32.85]$$

e i dati sono Poissoniani.

(b) Ipotizzando che i dati siano poissoniani, calcolare la linea centrale (CL) e i limiti di controllo (UCL, LCL) della carta c.

$$centerline = \bar{c} = \mu = 36.76$$
$$UCL = \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}} = 36.76 + 3\sqrt{36.76} = 54.95$$
$$LCL = \bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}} = 36.76 - 3\sqrt{36.76} = 18.57$$

(c) Ipotizzando che i dati siano gaussiani, calcolare la centerline e i limiti di controllo della carta X.

$$centerline = \bar{X} = \mu = 36.76$$

I limiti di controllo sono dati da $\bar{X} \pm 3\hat{\sigma}$.

$$\hat{\sigma} = \sqrt{40.32} = 6.35$$

Segue che

$$UCL = \bar{X} + 3\hat{\sigma} = 36.76 + 3 \cdot 6.35 = 55.81 \qquad LCL = \bar{X} - 3\hat{\sigma} = 36.76 - 3 \cdot 6.35 = 17.71$$

(d) Ricordando che in ogni ispezione vengono esaminati 20 schermi, calcolare la centerline e i limiti di controllo di una carta u che riporti il numero di non conformità per schermo ispezionato.

In questo caso $r = 20$.

$$centerline = \bar{u} = \frac{\bar{c}}{r} = \frac{36.76}{20} = 1.838$$

I limiti di controllo sono

$$UCL = \bar{u} + 3\sqrt{\frac{\bar{u}}{r}} = 1.838 + 3\sqrt{\frac{1.838}{20}} = 2.1137$$

$$LCL = \bar{u} - 3\sqrt{\frac{\bar{u}}{r}} = 1.838 - 3\sqrt{\frac{1.838}{20}} = 1.5623$$

Esercizio 2. Consideriamo una caratteristica di qualità distribuita normale.

(a) Calcolare limiti di controllo e centerline per una carta di controllo UWMA con $w = 3$, sapendo che $\bar{X} = 12.3$ e $s = 3.2$.

$$centerline = \bar{X} = 12.3$$

I limiti di controllo sono

$$\text{per } i = 1 \Rightarrow 12.3 \pm 3 \cdot \frac{3.2}{\sqrt{1}} \rightarrow UCL = 21.9 \quad LCL = 2.7$$

$$\text{per } i = 2 \Rightarrow 12.3 \pm 3 \cdot \frac{3.2}{\sqrt{2}} \rightarrow UCL = 19.09 \quad LCL = 5.51$$

$$\text{per } i \geq 3 \Rightarrow 12.3 \pm 3 \cdot \frac{3.2}{\sqrt{3}} \rightarrow UCL = 17.84 \quad LCL = 6.76$$

(b) Calcolare i limiti di controllo di una carta EWMA per $\lambda = 0.02$ e $L = 3$ quando il numero di campioni è grande.

Dopo un certo numero di campioni i limiti di controllo si stabilizzano. Si ha

$$\hat{\sigma}_Z = s\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}} = 3.2\sqrt{\frac{0.02}{1.98}} = 0.32$$

da cui si ottengono i limiti di controllo

$$UCL = \bar{X} + L\hat{\sigma}_Z = 12.3 + 3 \cdot 0.32 = 13.26$$

$$LCL = \bar{X} - L\hat{\sigma}_Z = 12.3 - 3 \cdot 0.32 = 11.34$$

Esercizio 3. Consideriamo un processo con $\mu_0 = 10$ e $\sigma = 1$. Costruiamo le carte di controllo EWMA per

1. $\lambda = 0.1$, $L = 3$
2. $\lambda = 0.2$, $L = 3$
3. $\lambda = 0.4$, $L = 3$

Discutere gli effetti di λ sull'andamento dei limiti di controllo.

Calcoliamo i limiti di controllo per campioni grandi, cioè quando i limiti di controllo sono praticamente costanti.

1. $$\hat{\sigma}_Z = s\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}} = 1\sqrt{\frac{0.1}{1.9}} = 0.229$$

   I limiti di controllo sono

   $$UCL = \bar{X}+L\hat{\sigma}_Z = 10+3\cdot 0.229 = 10.687 \qquad LCL = \bar{X}-L\hat{\sigma}_Z = 10-3\cdot 0.229 = 9.313$$

2. $$\hat{\sigma}_Z = s\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}} = 1\sqrt{\frac{0.2}{1.8}} = 0.\bar{3}$$

   I limiti di controllo sono

   $$UCL = \bar{X} + L\hat{\sigma}_Z = 10 + 3 \cdot 0.\bar{3} = 10.\bar{9} \qquad LCL = \bar{X} - L\hat{\sigma}_Z = 10 - 3 \cdot 0.\bar{3} = 9$$

3. $$\hat{\sigma}_Z = s\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}} = 1\sqrt{\frac{0.4}{1.6}} = 0.5$$

   I limiti di controllo sono

   $$UCL = \bar{X} + L\hat{\sigma}_Z = 10 + 3 \cdot 0.5 = 11.5 \qquad LCL = \bar{X} - L\hat{\sigma}_Z = 10 - 3 \cdot 0.5 = 8.5$$

All'aumentare di λ si allargano i limiti di controllo.

Esercizio 4. Supponiamo di voler analizzare 4 caratteristiche di qualità che hanno varianza unitaria e non sono correlate. La media, quando il processo è in controllo, è $\mu' = [0, 0, 0, 0]$.

(a) Supponendo che $\alpha = 0.05$, qual è il limite di controllo chi quadro per la carta?

Utilizzando le tavole del chi quadro si trova $\chi^2_{\alpha,n} = \chi^2_{0.05,4} = 9.49$.

(b) Supponiamo di osservare il vettore $y' = [3.5, 3.5, 3.5, 3.5]$. Calcolare il valore della statistica T^2 e dire se y è fuori controllo.

$$T^2 = (X - \mu)' \Sigma^{-1} (X - \mu)$$

dove Σ è la matrice di varianza-covarianza che, in questo caso, è I_4. Segue che

$$T^2 = [x_1, x_2, x_3, x_4] I_4 [x_1, x_2, x_3, x_4]' = \sum_{i=1}^{4} x_i^2$$

Quindi, T^2 valutato in y è

$$T^2(y) = \sum_{i=1}^{4} (3.5)^2 = 49$$

e il punto y è fuori controllo.

(c) Calcolare le quantità d_i, $i = 1, 2, 3, 4$. Queste quantità sono utili per determinare quale componente ha generato il fuori controllo?

Ricordiamo che

$$d_i = T^2 - T^2_{(i)}$$

dove $T^2_{(i)}$ è il valore di T^2 escludendo X_i. In questo caso avremo

$$T^2_{(1)} = [x_2, x_3, x_4] I_3 [x_2, x_3, x_4]' = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 = 3 \cdot (3.5)^2 = 36.75$$

da cui segue

$$d_1 = T^2 - T^2_{(1)} = 49 - 36.75 = 12.25$$

Visto che tutte le componenti del vettore y sono uguali, risulterà $d_1 = d_2 = d_3 = d_4$ e quindi i d_i non sono utili per determinare quale componente ha generato il fuori controllo.

(d) Supponiamo di osservare il vettore $y' = [2.5, 2, -1, 0]$. Calcolare il valore della statistica T^2. Il nuovo punto y è fuori controllo?

$$T^2(y) = (2.5)^2 + 2^2 + (-1)^2 + 0^2 = 11.25 > 9.49 = \chi^2_{0.05,4}$$

Il nuovo punto y è fuori controllo.

(e) Calcolare le quantità d_i, $i = 1, 2, 3, 4$ per il nuovo punto y e dire se queste quantità sono utili per determinare la componente che ha generato il fuori controllo.

$$T^2_{(1)} = 2^2 + (-1)^2 = 5 \Rightarrow d_1 = T^2 - T^2_{(i)} = 11.25 - 5 = 6.25$$
$$T^2_{(2)} = (2.5)^2 + (-1)^2 = 7.25 \Rightarrow d_2 = T^2 - T^2_{(2)} = 11.25 - 7.25 = 4$$
$$T^2_{(3)} = (2.25)^2 + 2^2 = 10.25 \Rightarrow d_3 = T^2 - T^2_{(3)} = 11.25 - 10.25 = 1$$
$$T^2_{(4)} = (2.25)^2 + 2^2 + (-1)^2 = 11.25 \Rightarrow d_4 = T^2 - T^2_{(i)} = 11.25 - 11.25 = 0$$

Il valore più alto corrisponde a d_1. Pertanto il fuori controllo potrebbe essere generato dalla prima componente.

Esercizio 5. Si considerano 3 caratteristiche di qualità, non correlate, con varianza unitaria e vettore delle medie $\mu' = [0, 0, 0]$. Supponendo che sia $Z(60) = \mu$, calcolare i punti $T^2(61)$ e $T^2(62)$ da disegnare sulla carta MEWMA, sapendo che $\lambda = 0.2$ e

$$X(61) = [1, 2, 0]' \qquad X(62) = [0, 2, 2]'$$

Poichè il campione è grande, possiamo utilizzare la seguente approssimazione della matrice Σ_Z:

$$\Sigma_Z = \frac{\lambda}{2-\lambda}\Sigma$$

dove $\Sigma = I_3$ è la matrice di varianza-covarianza. Segue

$$\Sigma_Z = \frac{\lambda}{2-\lambda}\Sigma = \frac{0.2}{1.8}I_3$$

$$\Sigma_Z^{-1} = \frac{1.8}{0.2}I_3 = 9I_3$$

I punti da disegnare sulla carta MEWMA sono

$$T^2(t) = (Z(t) - \mu)'\,\Sigma_Z^{-1}\,(Z(t) - \mu) = 9\left(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2\right)$$

$$Z(61) = \lambda X(61) + (1-\lambda)Z(60) = 0.2[1, 2, 0]' = [0.2, 0.4, 0]'$$

$$Z(62) = \lambda X(62) + (1-\lambda)Z(61) = 0.2[0, 2, 2]' + 0.8[0.2, 0.4, 0]' = [0.16, 0.72, 0.4]'$$

Da questo segue

$$T^2(61) = 9\left[(0.2)^2 + (0.4)^2\right] = 9 \cdot 0.2 = 1.8$$

$$T^2(62) = 9\left[(0.16)^2 + (0.72)^2 + (0.4)^2\right] = 9 \cdot 0.704 = 6.336$$

Esercizio 6. Un'azienda che produce circuiti stampati controlla il numero di non conformità per unità utilizzando una carta di controllo u con centerline 2.5 e limiti di controllo 3.8 e 1.2. In Fase II vengono raccolti 3 ulteriori dati

n. campione	n. di circuiti	n. tot. di non conformità
1	200	8
2	250	10
3	150	12

Sapendo che una unità è costituita da 50 circuiti stampati, verificare se qualcuno di questi 3 campioni è fuori controllo.

Si ha

n. campione	n. di circuiti	n. tot. di non conformità	n. unità ispezionate	n. medio di non conformità
1	200	8	4	2
2	250	10	5	2
3	150	12	3	4

Il campione 3 è fuori controllo.

Esercizio 7. Una carta di controllo X di Shewart ha centerline a 10 con limiti di controllo: $UCL = 16$, $LCL = 4$. Supponiamo di voler aggiungere a questa carta, una carta EWMA con $\lambda = 0.1$ e stessa ampiezza dei limiti di controllo in σ-unità della carta X. Quali sono i valori dei limiti di controllo, per molti campioni, della carta EWMA?

Per una carta di controllo di Shewart, i limiti sono del tipo $\pm 3\sigma$. La centerline della carta X è 10, quindi $\bar{X} = 10$. Sapendo che i limiti di controllo sono 16 e 4, possiamo trovare $\hat{\sigma}_X$:

$$6\hat{\sigma}_X = 16 - 4 \qquad \text{ampiezza dell'intervallo}$$

da cui segue $\hat{\sigma}_X = 2$.

A questo punto possiamo calcolare i limiti di controllo per la carta EWMA:

$$UCL = \bar{X} + L\hat{\sigma}_Z = \bar{X} + L \cdot s\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}} = 10 + 3 \cdot 2\sqrt{\frac{0.1}{1.9}} = 11.38$$

$$UCL = \bar{X} - L\hat{\sigma}_Z = \bar{X} - L \cdot s\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}} = 10 - 3 \cdot 2\sqrt{\frac{0.1}{1.9}} = 8.62$$

Esercizio 8. Si considerino 3 caratteristiche di qualità, con varianza unitaria e covarianze $\sigma_{ij} = 0.8$. Il valore della media quando il processo è in controllo è $\mu' = [0, 0, 0]$.

(a) Scrivere la matrice di varianza-covarianza.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.8 \\ 0.8 & 1 & 0.8 \\ 0.8 & 0.8 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Qual è il valore del limite di controllo chi quadro, supponendo $\alpha = 0.05$?

Dalle tavole si trova

$$\chi^2_{\alpha,p} = \chi^2_{0.05,3} = 7.81$$

(c) Si supponga di osservare il vettore $y' = [1, 2, 0]$. Calcolare il valore della statistica T^2 e dire se y è fuori controllo.

Per calcolare il valore di T^2 è necessario fare l'inversa della matrice Σ. Si ha

$$det(\Sigma) = 1 + (0.8)^3 + (0.8)^3 - (0.8)^2 - (0.8)^2 - (0.8)^2 = 0.104$$

da cui segue

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{0.104} \begin{bmatrix} (1 - 0.64) & -(0.8 - 0.64) & 0.64 - 0.8 \\ -(0.8 - 0.64) & 1 - 0.64 & -(0.8 - 0.64) \\ 0.64 - 0.8 & -(0.8 - 0.64) & 1 - 0.64 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{0.104} \begin{bmatrix} 0.36 & -0.16 & -0.16 \\ -0.16 & 0.36 & -0.16 \\ -0.16 & -0.16 & 0.36 \end{bmatrix}$$

$$T^2 = [x_1, x_2, x_3]\Sigma^{-1}[x_1, x_2, x_3]'$$

$$= \frac{1}{0.104} \left[0.36 \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) - 0.32 \left(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3\right)\right]$$

Abbiamo che

$$T^2(y) = \frac{1}{0.104} [0.36(1 + 4) - 0.32 \cdot 2] = 11.15$$

e il punto y risulta fuori controllo.

(d) Si supponga di osservare il vettore $y' = [2, 2, 1]$. Calcolare il valore della statistica T^2 e dire se il punto y è fuori controllo.

$$T^2(y) = \frac{1}{0.104} [0.36 (4 + 4 + 1) - 0.32 (4 + 2 + 2)] = 6.538$$

Il nuovo punto y non è fuori controllo.

Esercizio 9. Supponiamo di analizzare 50 campioni, ciascuno costituito da 3 unità, estratti quando il processo era in controllo. Il numero totale di non conformità è 325. Supponendo che i dati siano Poissoniani, determinare centerline e limiti di controllo per il numero di non conformità per unità di prodotto.

$$centerline = \bar{u} = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i}{n \cdot r} = \frac{325}{50 \cdot 3} = 2.167$$

$$UCL = \bar{u} + 3\sqrt{\frac{\bar{u}}{r}} = 3.02 \qquad LCL = \bar{u} - 3\sqrt{\frac{\bar{u}}{r}} = 1.32$$

Esercizio 10. Si consideri una caratteristica di qualità distribuita normale con media $\mu = 6$ e varianza $\sigma^2 = 2$. Stabilire se il punto $M_{20} = 8$ è fuori controllo nella carta UWMA con $w = 8$ e se il punto $Z_5 = 5.3$ è fuori controllo nella carta EWMA con $\lambda = 0.1$ e $L = 2.8$.

Calcoliamo i limiti di controllo per la carta UWMA. Per $w \geq 8$ i limiti di controllo sono

$$UCL = \mu + 3\frac{s}{\sqrt{w}} = 6 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = 6 + \frac{3}{2} = 7.5$$

$$LCL = \mu - 3\frac{s}{\sqrt{w}} = 6 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = 6 - \frac{3}{2} = 4.5$$

Si ha che $M_{20} > UCL$ quindi M_{20} è fuori controllo.

Calcoliamo ora i limiti di controllo per la carta EWMA. Si ha che

$$\hat{\sigma}_{Z_i} = \sigma\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}\left[1-(1-\lambda)^{2i}\right]} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{0.1}{1.9}\left[1-0.9^{10}\right]} = 0.26$$

Segue che i limiti di controllo sono

$$UCL = \mu + 2.8\hat{\sigma}_{Z_i} = 6 + 2.8 \cdot 0.26 = 6.728 \qquad LCL = \mu - 2.8\hat{\sigma}_{Z_i} = 6 - 2.8 \cdot 0.26 = 5.272$$

Quindi il punto Z_5 è in controllo.

Esercizio 11. Una carta di controllo per le non conformità viene utilizzata per controllare delle radio. L'unità ispezionata è costituita da 10 radio. Il numero medio di non conformità per radio è stato, in passato, di 1. Trovare i limiti di controllo 3σ per una carta c basata su questa unità ispezionata.

Si ha che $r = 10$, $\bar{u} = 1$. Segue che $\bar{c} = \bar{u} \cdot r = 1 \cdot 10 = 10$. I limiti di controllo della carta c, pertanto risultano

$$UCL = \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}} = 10 + 3\sqrt{10} = 19.49 \qquad LCL = \bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}} = 10 - 3\sqrt{10} = 0.51$$

Esercizio 12.

(a) Si ha una carta di controllo UWMA con $w = 4$, centerline 18.6 e limiti di controllo 24.2 e 13. Vengono raccolti i seguenti nuovi dati in Fase II

$$19.3\ ,\ 23.8\ ,\ 12.7\ ,\ 15\ ,\ 28.1\ ,\ 21.4\ ,\ 22.7\ ,\ 25.3\ ,\ 23.9\ ,\ 16.6$$

Calcolare i punti M_8, M_9 e M_{10} della carta UWMA e vedere se sono fuori controllo.

$$\begin{aligned} M_8 &= \frac{25.3 + 22.7 + 21.4 + 28.1}{4} = 24.375 \\ M_9 &= \frac{23.9 + 25.3 + 22.7 + 21.4}{4} = 23.325 \\ M_{10} &= \frac{16.6 + 23.9 + 25.3 + 22.7}{4} = 22.125 \end{aligned}$$

Il punto M_8 è fuori controllo.

(b) Supponiamo ora di avere una carta di controllo EWMA con $\lambda = 0.1$ e $Z_7 = 18.72$, stessa centerline indicata al punto precedente e limiti di controllo 19.6 e 17.6. I punti Z_8, Z_9 e Z_{10} sono fuori controllo?

$$\begin{aligned} Z_8 &= 0.1 \cdot 25.3 + 0.9 \cdot 18.72 = 19.378 \\ Z_9 &= 0.1 \cdot 23.9 + 0.9 \cdot 19.378 = 19.83 \\ Z_{10} &= 0.1 \cdot 16.6 + 0.9 \cdot 19.83 = 19.507 \end{aligned}$$

Il punto Z_9 risulta fuori controllo.

Esercizio 13. Una fabbrica tessile vuole stabilire una procedura di controllo per i difetti negli asciugamani che produce. Utilizzando un'unità ispezionata di 50 asciugamani, i dati delle ispezioni passate mostrano che, su 100 campioni, c'erano 950 non conformità totali. Supponendo che i dati raccolti siano Poissoniani, quale carta di controllo è appropriata? Calcolare centerline e limiti di controllo di tale carta.

La carta di controllo appropriata è la carta u con

$$centerline = \bar{u} = \frac{950}{100 \cdot 50} = 0.19$$

e limiti di controllo

$$UCL = \bar{u} + 3\sqrt{\frac{\bar{u}}{r}} = 0.19 + 3\sqrt{\frac{0.19}{50}} = 0.37$$

$$LCL = \bar{u} - 3\sqrt{\frac{\bar{u}}{r}} = 0.19 - 3\sqrt{\frac{0.19}{50}} = 0.005$$

Esercizio 14. Si considerano 3 caratteristiche di qualità, non correlate, ciascuna con varianza unitaria. Il vettore delle medie è dato da $\mu' = [1, 0, 2]$.

(a) Determinare l'equazione dell'ellisse di controllo per $\alpha = 0.05$.

Si ha che $\chi^2_{0.05,3} = 7.81$. L'equazione dell'ellisse di controllo è data da

$$(X-\mu)'\,\Sigma^{-1}\,(X-\mu) = \chi^2_{0.05,3}$$

dove $\Sigma = I_3$. Quindi

$$[x_1 - 1, x_2, x_3 - 2]I_3[x_1 - 1, x_2, x_3 - 2]' = \chi^2_{0.05,3}$$

e l'equazione dell'ellisse è

$$(x_1 - 1)^2 + x_2^2 + (x_3 - 2)^2 = 7.81$$

(b) Calcolare la statistica T^2 nel punto $y' = [2, 1, 2]$ e dire se y è fuori controllo.

$$T^2(y) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 + (x_3 - 2)^2 = (2-1)^2 + 1^2 + (2-2)^2 = 2$$

$T^2(y) < \chi^2_{0.05,3}$ quindi y non è fuori controllo.

(c) Calcolare la statistica T^2 nel punto $y' = [4, 2, 0]$ e dire se y è fuori controllo.

$$T^2(y) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 + (x_3 - 2)^2 = (4-1)^2 + 2^2 + (0-2)^2 = 17$$

$T^2(y) > \chi^2_{0.05,3}$ quindi y è fuori controllo.

(d) Calcolare i d_i e dire se possono essere utili per determinare quale componente ha generato il fuori controllo.

$$T^2_{(1)} = x_2^2 + (x_3-2)^2 = 2^2 + (0-2)^2 = 8 \Rightarrow d_1 = T^2 - T^2_{(1)} = 17 - 8 = 9$$
$$T^2_{(2)} = (x_1-1)^2 + (x_3-2)^2 = (4-1)^2 + (0-2)^2 = 13 \Rightarrow d_2 = T^2 - T^2_{(2)} = 17 - 13 = 4$$
$$T^2_{(3)} = (x_1-1)^2 + x_2^2 = (4-1)^2 + 2^2 = 13 \Rightarrow d_3 = T^2 - T^2_{(3)} = 17 - 13 = 4$$

Il fuori controllo potrebbe essere generato dalla prima componente.