Esercizi

Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

1. Data una V.C. X esponenziale con $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0, f_X(x) = 0, x < 0$, sia Y tale che $P(Y = X) = 0.5, P(Y = -X) = 0.5$. Allora, $f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda |y|}$.
2. $P(a < X \leq b) = F_X(a) - F_X(b)$.
3. Sia X una V.C. uniforme in $[-1, 1]$. Allora $Var[X] = 1/3$.
4. Una V.C. X può avere funzione di distribuzione $F_X(x) = 0$, $x \leq 0$, $F_X(x) = 1/(2 + x^{-1})$, $x > 0$.
5. Sia Z una V.C. gaussiana con $E[Z] = 0$, $Var[Z] = 1$. Allora $E[Z^2] = 1$.
6. La probabilità di ottenere esattamente un successo su due prove di Bernoulli è uguale a $2p(1 - p)$.
7. Si consideri una V.C. X la cui d.d.p. $f_X(x)$ è simmetrica rispetto all'origine, triangolare e diversa da zero nell'intervallo $[-1, 1]$. Allora, $P(|X| < 0.5) = 3/4$.
8. Se $F_X(x_2) = 1$ e $F_X(x_1) = 0$, allora $x_2 > x_1$.
9. Se X ha funzione di distribuzione $F_X(x) = 0$, $x \leq 0$, $F_X(x) = 1 - e^{-x}$, $x > 0$, allora la sua mediana è pari a $\ln 2$.
10. Sia X il risultato dell'estrazione di un numero della tombola (i numeri sono compresi tra 1 e 90). Allora, $E[X] = 45$.
11. Sia X una V.C. di Bernoulli. Allora, $p = 1$ implica $E[X^2] = 1$.
12. Sia X una V.C. con ddp $f_X(x) = 3x^2$, $0 \leq x \leq 1$. Allora, $E[X] = 2/3$.
13. Sia X una V.C. di Bernoulli. Allora, $E[X] = p$, $Var[X] = p(1 - p)$.
14. Sia X una V.C. uniforme in $[0, 1]$. Allora, $E[X^2] = 1/3$.
15. Sia X una V.C. con $f_X(x) = 2e^{2x}$, $x \leq 0$, $f_X(x) = 0$, $x > 0$. Allora, $F_X(x) = e^{2x}$, $x \leq 0$, $F_X(x) = 1$, $x > 0$.
16. Sia X una V.C. con $f_X(x) = 0.5$, $-1 < x \leq 0$, $f_X(x) = 0.25$, $0 < x \leq 2$, $f_X(x) = 0$, altrove. Allora, $E[X] = 0.5$
17. Si consideri una V.C. X con $f_X(x) = 2 - 2x$, $0 \leq x \leq 1$, e $f_X(x) = 0$, altrove. Allora, $E[X] = 1/3$.
18. Si consideri una V.C. X, esponenziale con deviazione standard uguale alla media. Allora, $\mathrm{P}(X \geq \ln 3) = 2/3$.
19. Si consideri una V.C. X con $f_X(x) = 1 - 0.5x$, $0 \leq x \leq 2$, $f_X(x) = 0$, altrove. Allora $E[X] = 2/3$.
20. Data una V.C. X, risulta sempre $F_X(E[X]) = 0.5$.

21. Per una V.C. esponenziale X, risulta $P(X > E[X]) = 0.5$.

22. Se X è una V.C. uniforme in $[-0.5, 0.5]$, allora, $E[X^2] = 1/12$.

23. Per una V.C. di Bernoulli X, risulta $E[X] = E[X^2] = p$.

24. Se X è una V.C. binomiale di ordine 2 con $p = 1/2$, allora $Var[X] = 1/4$.

25. Per una V.C. esponenziale, la mediana è più grande della media.

26. Risulta sempre $E[X^2] \geq E[X]^2$.

27. Sia X una V.C. esponenziale con $E[X] = 1/\lambda$. Allora, $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, x \geq 0$.

28. Data una V.C. X uniforme in $[0, 1]$, risulta $E[X|X < 0.5] = 0.25$.

29. Sia $Y = aX + b$, con $a > 0$. Allora, $F_Y(y) = F_X(\frac{y-b}{a})$.

30. Per una V.C. di Bernoulli la media non può essere superiore alla varianza.

31. La varianza di una V.C uniforme in $[-1, 1]$ è superiore alla varianza di una V.C. con ddp a triangolo in $[-1, 1]$ con vertice nell'origine.

32. Se X è una V.C. esponenziale X con $E([X]) = 1/\lambda$, allora $P(X > \ln 0.6/\lambda) = 0.4$.

33. Sia X una V.C. esponenziale con $E[X] = 1$. Allora, $E[X^2] = 2$.

34. Se $Y = 2X$, allora $F_Y(y) = F_X(y/2)$.

35. Sia X una V.C. di Bernoulli. Allora, $X - p$ è una V.C standardizzata.

36. Se $Z \sim N(0, 1)$ allora $E[Z^2]$=1.

37. Se X è una V.C esponenziale, allora $Y = \ln X$ è una V.C. uniforme in $[0, 1]$.

38. Se $Z \sim N(1, 1)$ allora $E[Z^2]$=2.

39. Risulta sempre $|E[X]| \leq \sqrt{E[X^2]}$.

40. Sia $Y = 2X$, dove X una V.C. esponenziale con $E[X] = 1$; allora $F_Y(y) = 1 - e^{y/2}$, $y \geq 0$.

41. Sia X una V.C. uniforme in $[0, 2\pi]$. Allora, $E[\sin(X)] = 0$.

42. Se X è una V.C. uniforme in $[-1, 1]$ allora $Y = |X|$ è uniforme in $[0, 1]$.

43. Sia $Y = X + 1$ con $E(X) = 0$. Allora risulta sempre $E(Y^2) \geq 1$.

44. Se X è una V.C. gaussiana con $E(X) = m$, allora $Y = e^X$ è lognormale e $E(Y) = e^m$.

1. Data una V.C X uniforme nellintervallo $[0, 1]$, si considerino le seguenti definizioni per Y:
   (a) $Y = \log(X/2)$ (b) $Y = \log(2X)$ (c) $Y = 1/X$
   (d) $Y = 1/X^2$ (e) $Y = 1/\sqrt{X}$ (f) $Y = \sqrt{X}$
   Calcolare le rispettive funzioni di densità.

2. In una partita di Monopoli siamo rimasti in due soli giocatori. Il mio avversario si trova in Piazza G. Cesare che dista 8 caselle da Viale dei Giardini e 10 caselle da Parco della Vittoria, che mi appartengono. Se il mio avversario lancia con i due dadi (6 facce ciascuno) un numero diverso da 8 e da 10, non finisce in nessuna delle mie proprietà. Ho già 4 case in entrambe le mie proprietà e posso acquistare un solo albergo (costo: 500 Euro).
   Se il mio avversario finisce in Viale dei Giardini deve pagare:
   con 4 case: 3250 Euro con albergo: 3750 Euro
   Se il mio avversario finisce in Parco della Vittoria deve pagare:
   con 4 case: 4250 Euro con albergo: 5000 Euro

   (a) Calcolare la probabilità che il mio avversario finisca in Viale dei Giardini
   (b) Calcolare la probabilità che il mio avversario finisca in Parco della Vittoria
   (c) Calcolare il valore atteso della mia vincita se non compro l'albergo (Suggerimento: la vincita è una V.C. discreta che può assumere solo 3 valori)
   (d) Calcolare il valore atteso della mia vincita se compro l'albergo in Viale dei Giardini
   (e) Calcolare il valore atteso della mia vincita se compro l'albergo in Parco della Vittoria

3. Data una V.C. X con d.d.p. $f_X(x)$ e un numero reale $a \neq 0$, si definisca $Y = aX$.

   (a) Ricavare l'espressione di $f_Y(y)$ in funzione di $f_X(x)$.
   (b) Scrivere cosa valgono $E[Y]$ e $Var[Y]$ in funzione di $E[X]$ e $Var[X]$.
   (c) Scrivere l'espressione di $f_Y(y)$ quando X una V.C. esponenziale con $E[X] = 1/\lambda$.

4. Si consideri una roulette senza lo zero. Un giocatore possiede 7 fiches ed adotta la seguente strategia. Punta una fiche sul rosso e, se vince, si ritira con una vincita V pari ad uno. Se invece esce il nero, al lancio successivo punta due fiches sul rosso. Se esce il rosso si ritira, altrimenti punta le sue ultime 4 fiches sul rosso. Con V indichiamo il guadagno del giocatore quando esce dal casinò (si noti che vi sono solo due possibilità: $V = 1$ oppure $V = -7$). Ricavare $E[V]$.

5. Una prova di esame consiste di 10 domande vero/falso. Ogni risposta esatta aggiunge un punto ed ogni errore ne toglie uno. Si supera l'esame se il punteggio complessivo è maggiore o uguale a 3. Uno studente, non avendo studiato la materia, decide di rispondere a caso.

   (a) Dire motivando la risposta con che probabilità supera l'esame se risponde solo alle prime 3 domande e si astiene nelle altre.
   (b) Dire motivando la risposta con che probabilità supera l'esame se risponde solo alle prime 4 domande e si astiene nelle altre.
   (c) Dire motivando la risposta con che probabilità supera l'esame se risponde solo alle prime 5 domande e si astiene nelle altre.
   (d) Scrivere, motivando la risposta, la formula che fornisce la probabilità di superare l'esame se risponde alle prime k domande, con $k \geq 3$.