Statistical Process Control

1 Introduzione

SPC si occupa del miglioramento della qualità. I metodi per il miglioramento della qualità possono essere applicati a qualsiasi area in una fabbrica o organizzazione (dal processo manifatturiero, al processo di sviluppo, dal marketing alla finanza, al campo dei servizi).

La qualità è uno dei fattori più importanti nella decisione di un consumatore per la scelta tra prodotti o servizi in competizione. Di conseguenza, il miglioramento della qualità è un fattore chiave per la competizione con le ditte concorrenti. La qualità di un prodotto può essere valutata in molti modi, ci sono quindi differenti dimensioni della qualità:

- performance (il prodotto è adatto all'uso per cui è stato creato?)
  il consumatore valuta un prodotto in base alle prestazioni relativamente alle specifiche funzioni per cui è stato creato;
- affidabilità (quanto spesso si rompe?)
  il consumatore valuta se un prodotto è affidabile o richiede molte riparazioni nel corso della sua vita;
- durata
  è l'effettiva vita di un prodotto. Il consumatore cerca un prodotto che ha buone prestazioni per un lungo periodo;
- facilità nella riparazione
  è importante che le riparazioni siano veloci ed economiche;
- estetica
  in molti casi il cliente punta su fattori quali il colore, la forma, ecc.
- caratteristiche (cosa fa?)
  il cliente preferisce un prodotto che ha caratteristiche aggiuntive oltre a quelle di base;
- reputazione del produttore
  il cliente fa affidamento alla reputazione passata della ditta riguardo la qualità del prodotto;

- conformità agli standard

Da questa discussione nasce ovvia la definizione classica di qualità:

qualità significa adattabilità per l'uso (fitness for use).

Una definizione più moderna di qualità è:

la qualità è inversamente proporzionale alla variabilità.

Questo implica che se la variabilità di un prodotto diminuisce, allora la qualità aumenta.
Compito della SPC è diminuire la variabilità.

Esempio. Alcuni anni fa una compagnia automobilistica americana fece uno studio sulla "trasmissione, prodotta in proprio o acquistata da un fornitore giapponese. Un'analisi sui costi di riparazione indicava che i pezzi giapponesi erano prodotti ad un costo inferiore. La ditta giapponese produceva i pezzi con una variabilità bassa confrontata con quella dei pezzi americani (la variabilità analizzata riguardava le varie componenti della "trasmissione). La ridotta variabilità si traduceva in costi inferiori.

Una bassa variabilità significa poche riparazioni e quindi meno rilavorazione dei pezzi, meno sforzo e meno costi. Da questo esempio si capisce che la qualità è inversamente proporzionale alla variabilità.

Ne consegue che si ottiene un miglioramento della qualità riducendo la variabilità nei processi e nei prodotti.

La variabilità può dipendere da differenze nelle materie prime, differenze nei processi di produzione (dovute, ad es., agli operatori).

La variabilità è descritta in termini statistici, quindi per migliorare la qualità vengono applicati dei metodi statistici.

La qualità per un prodotto è spesso legata a misure dei componenti (es. diametro di bulloni). Nel caso di servizi, la qualità è legata, ad es., al tempo di esecuzione di un ordine o al tempo per fornire un particolare servizio.

2 Brevi cenni storici

I metodi statistici e la loro applicazione per il miglioramento della qualità hanno una lunga storia.

- Prima del 1900: Taylor introduce i principi di "management scientifico nella produzione di massa (si divide il lavoro in attività (tasks) così i prodotti possono essere costruiti e assemblati più velocemente).

- Nel 1924 Shewhart (Bell Telephone Laboratories) sviluppa il concetto statistico di carta di controllo che è spesso considerato l'inizio formale del controllo statistico di qualità.

- Verso la fine del 1920 Dodge e Roming (Bell Telephone Laboratories) sviluppano il campionamento statistico come alternativa all'ispezione al 100%. PARENTESI: spiegazione di campione statistico - la statistica analizza solo il campione statistico per ottenere conclusioni che riguardano l'intera popolazione FINE PARENTESI

- Dalla metà del 1930 i metodi del controllo statistico di qualità sono in largo uso alla Western Electric, compagnia della Bell System. Ma il controllo statistico di qualità non è largamente riconosciuto dall'industria.

- Nel 1946 nasce la American Society for Quality Control che promuove l'uso di tecniche per il miglioramento della qualità per tutti i tipi di prodotti e servizi.

- Negli anni 50, Deming (che durante la II guerra mondiale ha condotto studi sul miglioramento della produzione negli USA) diventa un consulente dell'industria giapponese e convince i suoi vertici del potere dei metodi statistici e dell'importanza della qualità come strumento di competitività.

- Tra il 1950 e il 1960 nasce la necessità di affidabilità ingegneristica e il concetto che la qualità è fondamentale per gestire meglio l'organizzazione. Le applicazioni iniziali sono nell'industria chimica. Per avere questi concetti fuori dall'industria chimica, occorre aspettare la fine degli anni 70.

- Negli anni 80, molte compagnie americane scoprono che le loro concorrenti giapponesi utilizzano metodi di miglioramento dell'affidabilità e della performance dei prodotti già dagli anni 60. Quindi dagli anni 80 si ha una crescita nell'uso dei metodi statistici per il miglioramento della qualità negli Stati Uniti. L'utilizzo dei metodi statistici per il miglioramento della qualità è stato fondamentale per la ripresa dell'industria americana che era stata superata da quella giapponese.

  Un esempio è dato dal dominio giapponese nel mercato delle videocassette. I giapponesi non hanno inventato le videocassette che sono nate in Europa e nord America. I primi modelli europei e americani erano però inaffidabili e presentavano molti difetti. I giapponesi entrarono nel mercato puntando su questi due aspetti (affidabilità e pochi difetti) per competere con i concorrenti e ben presto conquistarono il mercato. Negli anni seguenti migliorarono altri aspetti, quali la performance e l'estetica del prodotto. Di fatto resero praticamente impossibile l'ingresso di nuovi concorrenti sul mercato.

- Sempre negli anni 80, grazie alle teorie di Deming e Juran, inizia il Total Quality Management (TQM): strategia per implementare le attività di miglioramento della qualità in modo tale che tutta l'impresa sia coinvolta nel raggiungimento dell'obiettivo. Questo comporta il coinvolgimento dei dipendenti che devono fare la loro parte nel processo di miglioramento della qualità. Il TQM ha avuto solo un moderato successo a causa dell'inadeguato uso dei metodi statistici e al fatto che non era un obiettivo primario la riduzione della variabilità.

- Un altro programma popolare negli anni 80 era il "quality is free in cui si identificano i costi di qualità. L'identificazione dei costi di qualità può essere molto utile ma i professionisti non avevano idea di cosa fare per migliorare effettivamente molti processi industriali complessi. Infatti, i leaders di questa iniziativa non avevano conoscenza delle metodologie statistiche e del loro ruolo per il miglioramento della qualità.

- L'International Standards Organization (fondata nel 1947) ha sviluppato una serie di standard di qualità, comprendenti la nota serie ISO 9000 (1^a emissione di questi standard nel 1987, poi nel 1994, 2000 e 2008 che rappresenta le norme attualmente in vigore). L'obiettivo di questi standard è il sistema di qualità e include componenti quali il controllo di documenti e dati, l'identificazione del prodotto, i test di controllo, il controllo della qualità, le metodologie statistiche, ecc. Molte organizzazioni hanno richiesto ai loro fornitori di essere certificati ISO 9000 o seguenti perché un prodotto è certificato ISO 9000 solo se tutte le sue componenti sono certificate ISO 9000.

- Sta crescendo la convinzione che in un'organizzazione tutto il personale, dai vertici al personale operativo, debbano avere una conoscenza dei metodi statistici e della loro utilità nei processi produttivi.

3 Processi in/fuori controllo

SPC si occupa di caratterizzare la variabilità nelle caratteristiche di un prodotto in modo tale che si possa prevedere la percentuale di prodotti che soddisfano le specifiche.

Le imprese hanno grandi quantità di dati ma poche informazioni. La statistica è un potente metodo per estrarre informazione significativa dai dati.

Quando si ha a disposizione un numero abbastanza grande di dati (almeno un centinaio) si può costruire un istogramma.

PARENTESI: spiegazione di istogramma - rappresentazione grafica a barre verticali dei dati in cui la frequenza è rappresentata dall'altezza delle barre - i dati vengono raggruppati in celle (in genere tra 4 e 20 celle, spesso n. celle = radice quadrata del campione); celle di ampiezza uniforme; limite inferiore della prima cella appena sotto al valore più basso. L'istogramma permette di visualizzare più facilmente alcune proprietà dei dati: tendenza centrale, distribuzione, dispersione. FINE PARENTESI

Esempio. Autoclave la cui temperatura deve stare nell'intervallo 343^{o}F-357^{o}F. Ogni 15 secondi una termocoppia fornisce 5 misure di temperatura. Ci possiamo chiedere: qual è la temperatura media, quanta variabilità hanno i dati e se sono rispettate le tolleranze.

Tabella: Misure di temperatura nell'autoclave

Sample #	°F	Sample #	°F	Sample #	°F
1	351,17	9	349,57	18	356,31
1	348,57	9	346,58	18	344,3
1	348,57	10	345,96	18	348,34
1	350,92	10	351,87	18	352,24
1	353,9	10	345,74	19	351,91
2	350,26	10	347,59	19	353,94
2	355,26	10	352,91	19	342,94
2	358,44	11	348,13	19	347,71
2	346,87	11	345,04	19	355,85
2	353,33	11	346,55	20	347,02
3	344,31	11	347,77	20	351,49
3	350,79	11	356,79	20	354,36
3	349,73	12	345,77	20	352,74
3	351,54	12	342,16	20	357,86
3	349,28	12	349,7	21	349,61
4	359,64	12	346,89	21	347,75
4	347,81	12	351,83	21	351,35
4	347,29	13	355,34	21	343,02
4	352,89	13	356,75	21	351,91
4	355,41	13	360,22	22	350,15
5	355,63	13	351,06	22	345,22
5	350,51	13	352,56	22	348,44
5	351,07	14	348,5	22	346,13
5	346,46	14	347,07	22	353,72
5	353,09	14	344	23	352,32
6	354,4	14	351,5	23	342,85
6	349,08	14	346,69	23	352,18
6	348,73	15	342,98	23	353,5
6	345,32	15	343,53	23	353,72
6	352,11	15	347,8	24	347,43
7	353,1	15	352,9	24	353,61
7	357,19	15	352,81	24	348,66
7	349,07	16	350,09	24	352,44
7	344,29	16	352,42	24	353,51
7	349,84	16	347,26	25	351,29
8	349,95	16	348,91	25	349,31
8	343,96	16	348,06	25	355,12
8	346,28	17	350,73	25	342,21
8	341,83	17	352,8	25	352,7
8	349,23	17	345,78		
9	350,39	17	347,59		
9	351,92	17	353,91		
9	344,22	18	347,91		

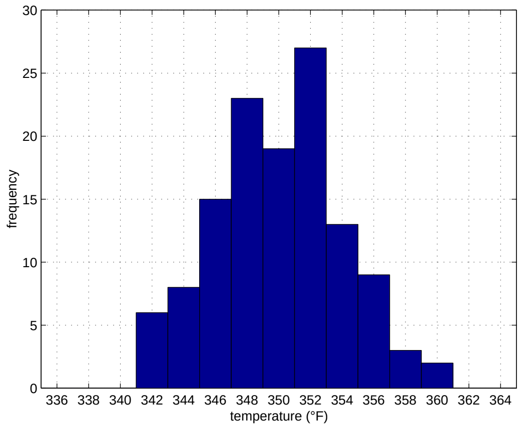


Figura 1: Istogramma dei dati

Dal grafico si ha già un'idea della distribuzione dei dati e del valore approssimativo intorno a cui sono centrati. E' utile però avere misure numeriche di tendenza centrale e di variabilità dei dati.

La misura di centralità più importante è la media campionaria:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

dove $x_1, x_2, ..., x_n$ è il campione.

La variabilità nei dati campionari è misurata dalla varianza campionaria:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{n}}{n-1}$$

Visto che l'unità di misura della varianza campionaria è il quadrato dell'unità di misura della media campionaria, spesso si usa la deviazione standard S come misura di variabilità.

PARENTESI: due parole su media e varianza campionaria FINE PARENTESI

Nel caso dell'autoclave dell'esempio, si ha che la temperatura media è di 349.983^oF, mentre la deviazione standard è di 3.98^oF.

L'istogramma è approssimativamente simmetrico e unimodale, con picco vicino alla media. Una distribuzione che ben rappresenta questo andamento è la normale.

PARENTESI: due parole sulla distribuzione normale FINE PARENTESI

Il 99.7% dell'area sotto la curva sta tra $\mu - 3\sigma$ e $\mu + 3\sigma$, quindi, in questo caso, tra 338.043^oF e 361.923^oF.

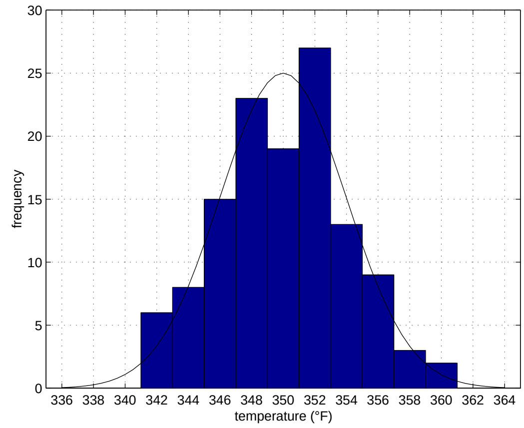
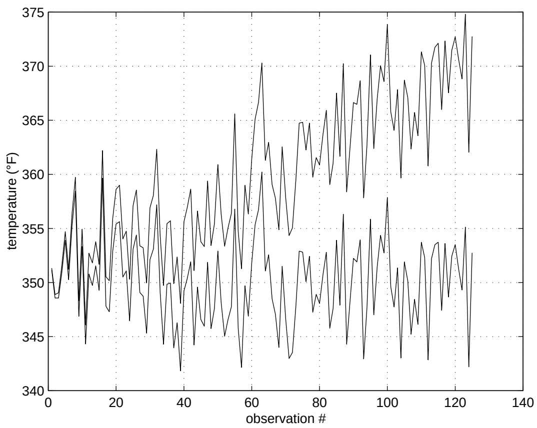
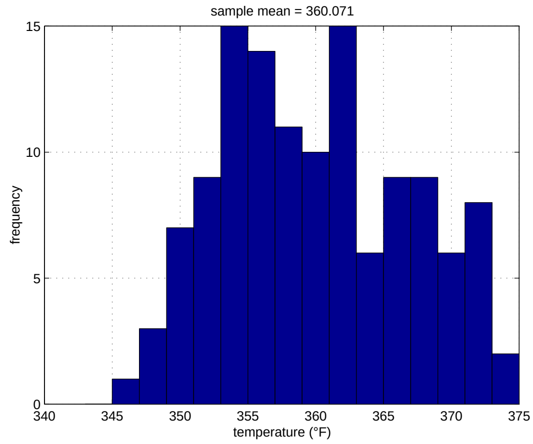


Figura 2: Istogramma dei dati

L'istogramma da solo però non permette di fare previsioni. Supponiamo di avere dei dati che mostrano un trend, come nella figura sotto.



L'istogramma che ne deriva è il seguente:



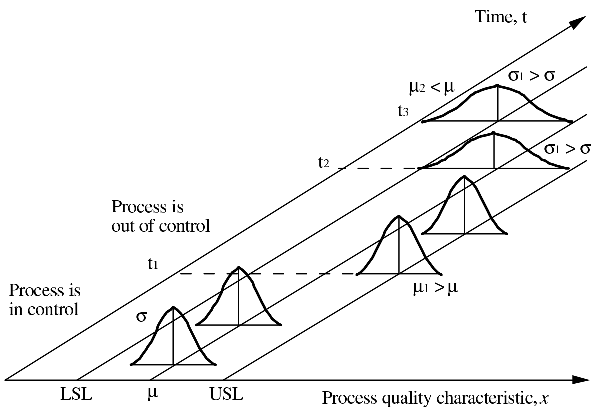
L'istogramma mi dice che il 50% della produzione è sotto la media di 360.071^{o}F, ma non ci si può aspettare che in futuro il 50% della produzione sarà ancora sotto la media di 360.071^{o}F. L'andamento temporale dei dati che si vede dalla figura sopra, mostra che la temperatura tende a crescere nel tempo.

Inoltre, guardando l'istogramma non siamo in grado di dire se le temperature cambiano significativamente durante il ciclo. Per fare questo possiamo costruire ed analizzare una carta di controllo che ci permetterà di valutare la variabilità nel tempo.

La variabilità è dovuta a due tipi di cause:

- *cause comuni* ("chance causes) associate alla "variabilità naturale intrinseca al processo: è l'effetto cumulato di molte cause inevitabili - paragonabile al rumore di fondo;
- *cause speciali* ("assignable causes): sono dovute ad eventi occasionali (macchinari regolati male, errori dell'operatore, materia prima difettosa, ecc.). La variabilità che ne consegue è significativamente più grande di quella dovuta alle cause comuni.

Un processo che opera in assenza di cause speciali è detto **in controllo** statistico, mentre un processo che opera in presenza di cause speciali è detto **fuori controllo** statistico.

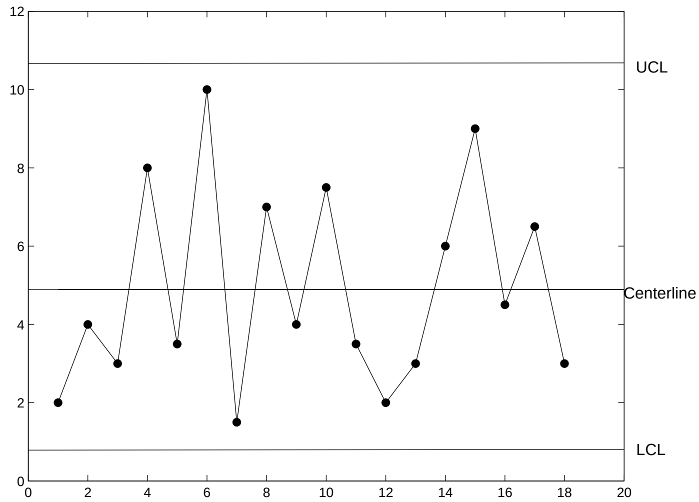


Spesso la produzione opera in controllo per lunghi periodi di tempo, finché si verifica una causa speciale e va fuori controllo. Quando il processo è in controllo, la quasi totalità della produzione cade tra i limiti di specifica inferiore e superiore. Quando il processo è fuori controllo, una certa quantità di prodotti cade fuori dalle specifiche.

L'obiettivo principale del controllo statistico di processo è di eliminare le cause speciali rapidamente in modo che non vengano prodotte molte unità non conformi. Quindi riportare il processo in controllo statistico individuando e rimuovendo, ad una ad una, le cause speciali. A tale scopo vengono usate le carte di controllo.

Com'è fatta una carta di controllo?

La carta di controllo è la rappresentazione grafica di una caratteristica di qualità che è stata misurata da un campione (viene rappresentata rispetto al tempo o al campione).



La centerline rappresenta la media della caratteristica di qualità corrispondente allo stato "in controllo. Ci sono poi altre due linee orizzontali che rappresentano i limiti di controllo: superiore e inferiore (UCL = upper control limit, LCL = lower control limit). I limiti di controllo sono scelti in modo tale che, se il processo è in controllo, la gran parte dei punti sta tra questi limiti (in genere si sceglie il 99.7% della variabilità naturale che, nel caso gaussiano, significa $\pm 3\sigma$ dalla media).

La carta di controllo viene usata per monitorare nel tempo eventuali modifiche della variabilità statistica che rivelano la presenza di cause speciali. I possibili cambiamenti si possono avere nella media o nella SD. Quindi, in genere, si utilizzano due carte di controllo: una per valutare la stabilità della media e una per valutare la stabilità della SD.

Esempio. Si ritorna all'esempio dell'autoclave con i dati raggruppati in sottogruppi di 5 elementi.

Esempio: Autoclave

Tabella: Misure di temperatura nell'autoclave con media e range calcolate per ogni sottogruppo

Sottogruppo			temperature			$\bar{X}$	**Range**
1	351.17	348.57	348.57	350.92	353.90	**350.62**	**5.33**
2	350.26	355.26	358.44	346.87	353.33	**352.83**	**11.57**
3	344.31	350.79	349.73	351.54	349.28	**349.13**	**7.23**
4	359.64	347.81	347.29	352.89	355.41	**352.60**	**12.35**
5	355.63	350.51	351.07	346.46	353.09	**351.35**	**9.17**
6	354.40	349.08	348.73	345.32	352.11	**349.92**	**9.08**
7	353.10	357.19	349.07	344.29	349.84	**350.69**	**12.90**
8	349.95	343.96	346.28	341.83	349.23	**346.25**	**8.12**
9	350.39	351.92	344.22	349.57	346.58	**348.53**	**7.70**
10	345.96	351.87	345.74	347.59	352.91	**348.81**	**7.17**
11	348.13	345.04	346.55	347.77	356.79	**348.85**	**11.75**
12	345.77	342.16	349.70	346.89	351.83	**347.27**	**9.67**
13	355.34	356.75	360.22	351.06	352.56	**355.18**	**9.16**
14	348.50	347.07	344.00	351.50	346.69	**347.55**	**7.50**
15	342.98	343.53	347.80	352.90	352.81	**348.00**	**9.92**
16	350.09	352.42	347.26	348.91	348.06	**349.34**	**5.16**
17	350.73	352.80	345.78	347.59	353.91	**350.16**	**8.13**
18	347.91	356.31	344.30	348.34	352.24	**349.82**	**12.01**
19	351.91	353.94	342.94	347.71	355.85	**350.47**	**12.91**
20	347.02	351.49	354.36	352.74	357.86	**352.69**	**10.84**
21	349.61	347.75	351.35	343.02	351.91	**348.72**	**8.89**
22	350.15	345.22	348.44	346.13	353.72	**348.73**	**8.50**
23	352.32	342.85	352.18	353.50	353.72	**350.91**	**10.87**
24	347.43	353.61	348.66	352.44	353.51	**351.13**	**6.18**
25	351.29	349.31	355.12	342.21	352.75	**350.13**	**12.91**

Nota: i dati sono organizzati in sottogruppi per poter valutare la dispersione.

Calcolare le medie dei sottogruppi è abbastanza veloce, non è lo stesso per le SD. Quindi spesso, invece della SD si utilizza il range e si considerano le carte di controllo per media e range.

Iniziamo con la range chart:

$$Centerline \qquad \bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^{k} R_i}{k}$$

$$UCL_R : \qquad D_4 \bar{R}$$

$$LCL_R : \qquad D_3 \bar{R}$$

Tabella 1: Costanti per carte di controllo (ipotesi di gaussianità)			
n	*A2*	*D3*	*D4*
1	2.660	0	3.267
2	1.880	0	3.267
3	1.023	0	2.574
4	0.729	0	2.282
5	0.577	0	2.114
6	0.483	0	2.004
7	0.419	0.076	1.924
8	0.373	0.136	1.864
9	0.337	0.184	1.816
10	0.308	0.223	1.777

Nel nostro caso ($k = 25$):

$$\bar{R} = 9.401 \quad ; \quad UCL_R = 2.114 \cdot 9.401 = 19.874 \quad ; \quad LCL_R = 0$$

Nessuno dei range esce dai limiti di controllo, quindi non vi sono dispersioni significative.

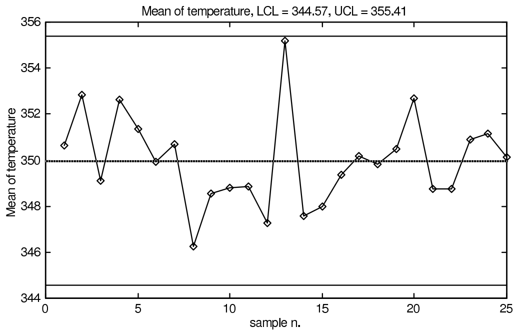
Passiamo all'analisi della $\bar{X}$ chart:

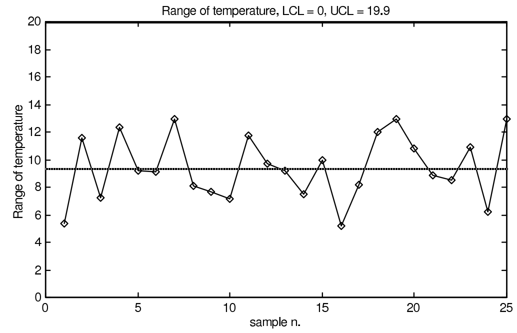
$$\bar{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \bar{X}_i}{k} = 349.983$$

$$UCL_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} + A_2\bar{R} = 349.983 + 0.577 \cdot 9.401 = 355.407$$

$$LCL_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} - A_2\bar{R} = 349.983 - 0.577 \cdot 9.401 = 344.559$$

Anche in questo caso nessuna media esce dai limiti di controllo.





È sufficiente questo per dire che il processo è in controllo?

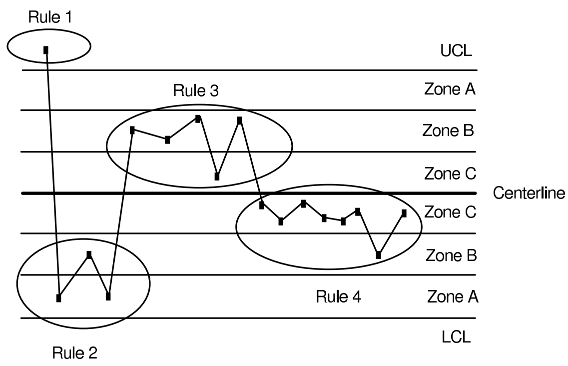
Se il processo è in controllo, allora i punti rappresentati sulle carte di controllo devono avere un andamento aleatorio. Ci sono 4 regole comunemente usate per vedere se un processo è fuori controllo (Western Electric Rules, 1956):

1. uno o più punti fuori dai limiti di controllo;

2. due punti su tre consecutivi fuori dai "warning limits (banda $\pm 2\sigma$);

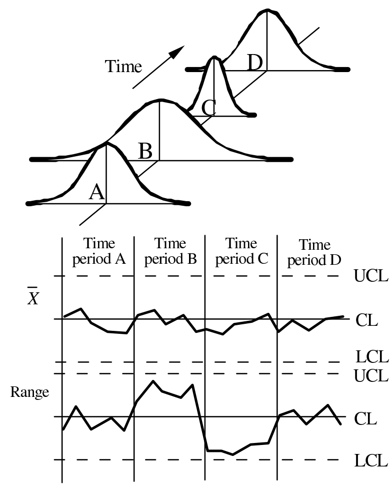
3. 4 punti su 5 consecutivi fuori dalla banda $\pm\sigma$;

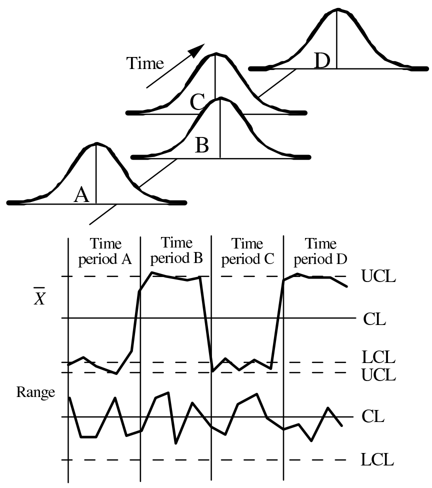
4. 8 punti consecutivi dallo stesso lato della centerline.



L'uso di queste regole è controverso. Gli statistici non le amano perché aumentano la probabilità dei falsi allarmi. Tuttavia, nelle imprese sono comunque utilizzate.

Usando la combinazione di $\bar{X}$ chart e range chart si può vedere se una delle due variabili (e quale) fa andare il processo fuori controllo.





Che fare se il processo è fuori controllo?

Fase I: portare il processo in controllo

1. Ricercare e rimuovere eventuali cause speciali
2. Rimuovere i dati influenzati dalle cause speciali e/o raccogliere nuovi dati
3. Ricalcolare la range chart
4. Se vi sono punti fuori controllo torna ad 1.
5. Ricalcolare la $\bar{X}$ chart
6. Se vi sono punti fuori controllo torna ad 1.

Fase II: mantenere il processo in controllo

1. Calcolo i limiti di controllo e li estendo nel futuro.
2. Se vi sono punti fuori controllo, ricercare e rimuovere eventuali cause speciali.
3. Se necessario, ricalcolare i limiti di controllo raccogliendo nuovi dati (non mescolare vecchi e nuovi!).

Quando si devono ricalcolare i limiti di controllo?
Se le seguenti condizioni sono tutte vere

- il processo è cambiato
- la causa del cambiamento è nota
- ci si aspetta che il cambiamento si mantenga nel tempo
- ci sono abbastanza dati (almeno 15 sottogruppi).

Ragioni della popolarità delle carte di controllo:

1. sono tecniche provate di miglioramento della produttività: riducono scarti e rilavorazioni del prodotto - in questo modo aumenta la produttività, decrescono i costi e la capacità produttiva (intesa come n. di prodotti per ora) aumenta;
2. le carte di controllo aiutano a tenere il processo in controllo (il che è consistente con la filosofia del "fare giusto la prima volta");
3. prevengono aggiustamenti non necessari: una carta di controllo può distinguere tra rumore di fondo e variazioni fuori norma. Gli aggiustamenti non necessari possono deteriorare il processo di performance. La carta di controllo è consistente con la filosofia "se non è rotto, non ripararlo";

Una parte importante del processo correttivo associato alle carte di controllo è l'OCAP (Out of Control Action Plan). Un OCAP è la descrizione di una sequenza di attività che devono essere intraprese dopo che si è verificato un evento che le attiva.

L'OCAP è costituito da tre fattori fondamentali:

- Activator: segnale di fuori controllo
- Check points: le potenziali cause speciali numerate secondo la loro probabilità di causare quel tipo di fuori controllo (per prima la causa più probabile) o secondo la facilità di verifica (per prima la più facile da verificare).
- Terminators: L'azione per risolvere la condizione di fuori controllo eliminando la causa speciale che lo ha causato.

La ricerca della causa e l'azione sono affidate a chi mantiene la singola carta.

Una CC non dovrebbe mai essere implementata senza il suo OCAP.

In alcune ditte ci sono dei team responsabili del progetto delle carte di controllo, del calcolo dei limiti di controllo, della costruzione dell'OCAP e del suo aggiornamento (infatti l'OCAP è un documento che viene modificato nel tempo, quando si hanno nuove conoscenze sul processo).

4 Indici C_p e C_{pk}

Finora abbiamo visto risultati sulla stabilità e la consistenza del processo, ma nulla è stato detto circa la accettabilità.

È possibile avere un processo stabile e consistente che produce il 100% di prodotti inaccettabili. La capacità del processo si riferisce all'uniformità.

Gli studi relativi alla capacità del processo sono utilizzati per confrontare la variazione naturale dei dati individuali rispetto alle tolleranze ingegneristiche e indicano cosa il processo è capace di produrre e non cosa sta producendo realmente.

Può essere utile avere un metodo quantitativo per esprimere la capacità del processo. Per questo sono stati introdotti gli indici C_p e C_{pk}. Per calcolare questi indici è necessario che siano soddisfatte alcune ipotesi:

- il processo è in controllo
- l'istogramma dei dati è gaussiano
- sono noti i limiti di specifica (LSL: lower specification limit; USL: upper specification limit).

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma} \quad \text{capacità del processo}$$

La variazione naturale del processo 6σ può essere interpretata come il range entro il quale ci si aspetta che finiscano quasi tutte le misurazioni di una popolazione (99.7% se gaussiano).

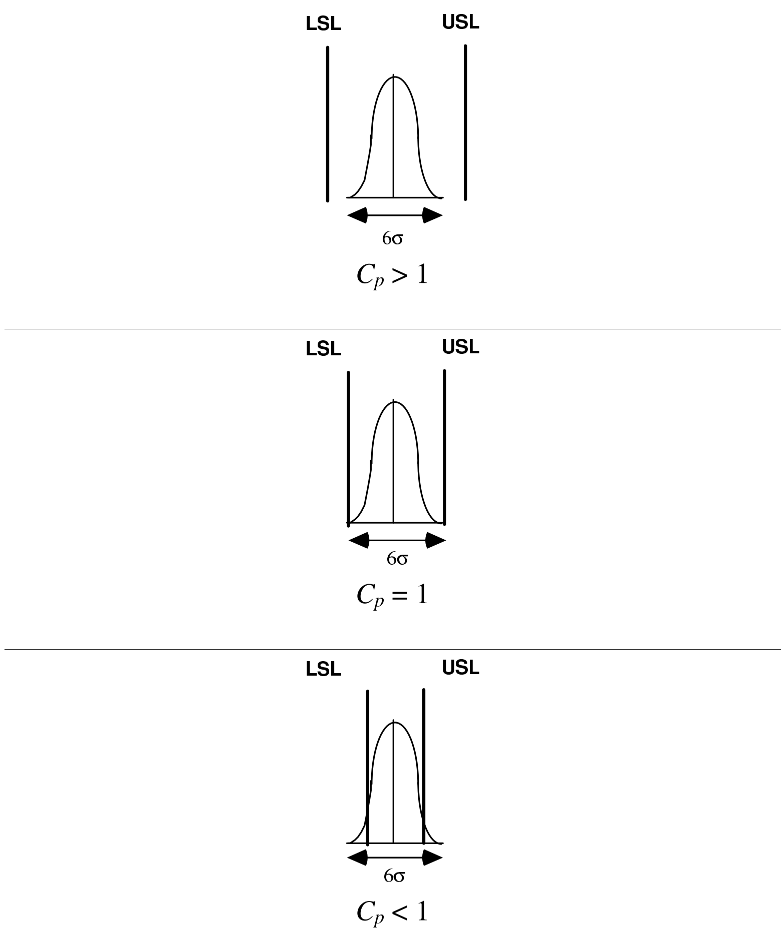
Nelle applicazioni pratiche la SD è quasi sempre sconosciuta e deve essere sostituita con una stima (ad es. SD campionaria), allora anche C_p è una stima, quindi è bene basarsi almeno su 100 punti.

La capacità del processo C_p è una misura della capacità del processo di costruire prodotti che soddisfano le specifiche e non tiene conto di dove si trova la media rispetto alle specifiche.

Il processo si dice centrato se $\mu = (USL + LSL)/2$ (cioè se la media cade nel mezzo dei limiti di specifica). $USL - LSL$ rappresenta la tolleranza ingegneristica.

C_p confronta la tolleranza ingegneristica con la variabilità naturale: se il processo è centrato e gaussiano, $C_p > 1$ significa che il processo è capace di produrre quasi il 100% di prodotti accettabili (meno del 3 per mille dei campioni è fuori specifica).

Indice C_p: processi centrati



- $C_p > 1$: il processo è più che capace di produrre la quasi totalità dei prodotti entro le tolleranze;
- $C_p = 1$: il processo è appena capace di produrre entro le tolleranze;
- $C_p < 1$: il processo non è capace di produrre il 100% di risultati accettabili.

Dato un singolo valore C_p si sa immediatamente in che rapporto sta la variazione naturale del processo rispetto alle tolleranze ingegneristiche. C_p può essere usato per indicare quanti pezzi ci si aspetta escano dalle tolleranze.

Tabella 2: Scarti in base al valore di C_p
(se il processo è in controllo, gaussiano, centrato)

C_p	*Scarto previsto*	
0.5	133 620	ppm
0.6	71 860	
0.7	35 730	
0.8	16 396	
0.9	6 934	
1.0	2 700	
1.1	966	
1.2	318	
1.3	96	
1.4	26	
1.5	7	
1.6	2	
1.7	340	ppb
1.8	60	
1.9	12	
2.0	2	

ppm = parti per milione
ppb = parti per bilione
(10,000 ppb = 1%)

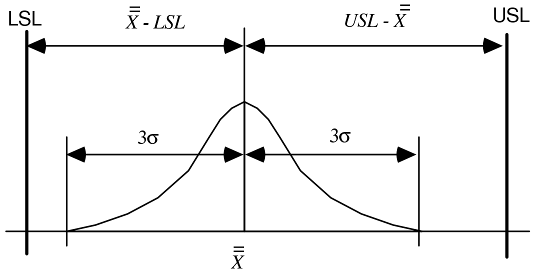
Se il processo non è centrato, avere $C_p > 1$ non garantisce che il processo produca la quasi totalità dei prodotti entro i limiti di specifica. Sappiamo solo che è potenzialmente capace di farlo, ma non è detto che lo faccia. (Se, ad es., il processo ha una media che è oltre USL e nessuna parte della curva normale cade entro le tolleranze ingegneristiche e $C_p > 1$, si potrebbe pensare che il processo sta attualmente producendo il 100% dei prodotti accettabili, ma di fatto non è così). Per questo l'indice C_p è stato criticato ed è stato introdotto l'indice C_{pk} che tiene conto della centratura:

$$C_{pk} = \min\left\{\frac{USL - \mu}{3\sigma}, \frac{\mu - LSL}{3\sigma}\right\}$$

C_{pk} è un indice che confronta le statistiche del processo con le tolleranze ingegneristiche. Tiene conto della variabilità del processo e anche della centratura.

Come interpretare C_{pk}?

- $Cpk > 1$: processo più che capace di produrre entro le tolleranze specificate
- $Cpk = 1$: processo appena capace di produrre entro le tolleranze specificate

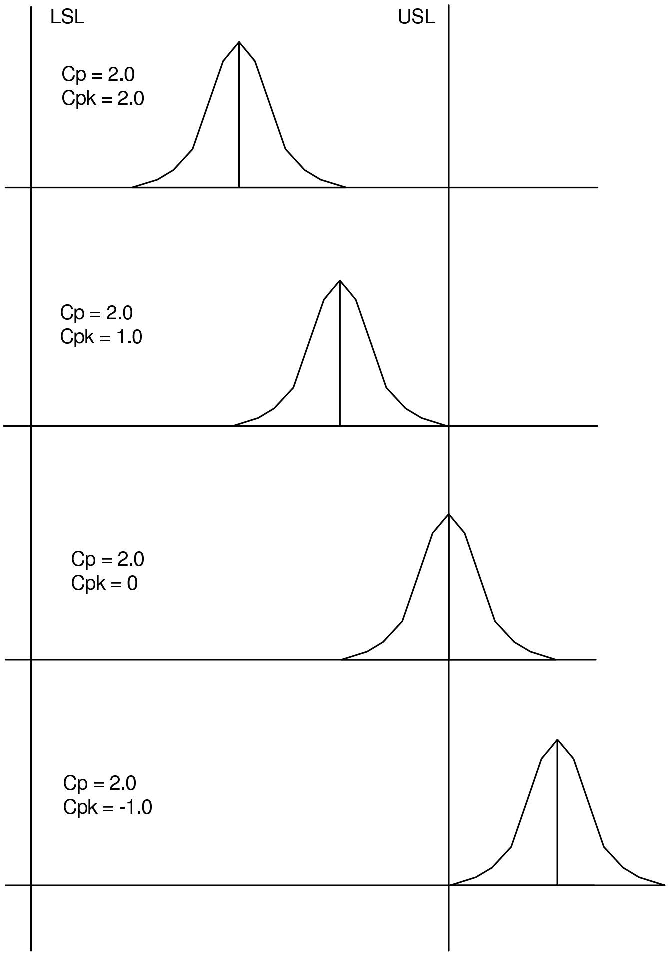


- $Cpk < 1$: processo non capace di produrre la quasi totalità dei prodotti entro le tolleranze specificate
- $Cpk < 0$: la media del processo è all'esterno dei limiti di specifica

Relazioni tra C_p e C_{pk}:

- $Cpk \leq Cp$
- $Cpk = Cp$ se e solo se il processo è centrato
- $Cpk > 1$ e $Cp > 1$: il processo è capace e produce entro le tolleranze
- $Cpk < 1$ e $Cp < 1$: il processo non è potenzialmente capace (e non produce entro le tolleranze)
- $Cpk < 1$ e $Cp > 1$: il processo è potenzialmente capace, non centrato e non produce entro le tolleranze

Relazioni tra C_p e C_{pk}: esempi



Per molte industrie americane e giapponesi $C_{pk} = 1.33$ è il minimo valore accettabile.

Negli anni 80 la Motorola sviluppa il programma “six sigma il cui obiettivo è ridurre la variabilità a un livello in cui i pezzi difettosi sono estremamente improbabili, cioè si chiede: $USL - LSL > 12\sigma$. Questo corrisponde ad avere meno di 2 ppb di pezzi difettosi, contro le 2700 ppm del 3 sigma.

Curiosità. I decessi da incidenti aerei sono 4.3 su 10 milioni di voli e corrispondono ad una qualità “4.92 sigma.

Se si ha un solo limite di specifica (ad es. USL), allora basta usare $C_{pk} = USL - \mu/3\sigma$.

OSSERVAZIONI

- Non si può usare C_{pk} per mostrare che il processo è in controllo; al contrario il calcolo di C_{pk} si basa sull'ipotesi che il processo sia in controllo!
- Per processi centrati, il calcolo degli scarti in base a C_{pk} non è robusto rispetto alla violazione dell'ipotesi di gaussianità.

- Per processi non centrati non esiste una relazione biunivoca tra C_{pk} e percentuale di scarti (= prodotti fuori specifica) nemmeno nel caso gaussiano. Essendo basato su un minimo, C_{pk} tiene conto solo della distanza della media dal limite di specifica più vicino mentre anche l'altra distanza influenza la percentuale di scarti). Allora può accadere che ad un miglioramento di C_{pk} corrisponda un peggioramento degli scarti!

- Sono stati proposti numerosi indici alternativi, ma nessuno è privo di problemi.

- Perché non stimare direttamente gli scarti?

  Per far questo occorre calcolare l'integrale delle code della distribuzione e questo è di difficile stima se la distribuzione non è nota.

- In generale non ci interessano solo gli scarti, ma anche la distanza della media dal target, che usualmente è $(USL + LSL)/2$.

5 Raccolta dati

La raccolta dati costa denaro, quindi i dati dovrebbero essere raccolti quando è ragionevole che questo porti un beneficio all'organizzazione, quando l'informazione ottenuta dai dati vale più dei soldi spesi per raccoglierli.

I dati devono essere raccolti il più possibile vicino alla fase che si desidera controllare. Ad es. se si vuole analizzare una caratteristica relativa all'affilatura, i dati devono essere raccolti durante la fase di affilatura. Se si eseguono altre operazioni prima di prendere le misure, va persa un po' di informazione relativa all'affilatura.

La frequenza di raccolta dati dipende da alcuni fattori:

1. la disponibilità dei dati
2. il costo della raccolta dati
3. l'intervallo di tempo tra cambiamenti rilevanti nel processo
4. la stabilità del processo

Nell'esempio dell'autoclave si possono avere molti dati senza spesa. Per questo le temperature sono registrate ogni 15 secondi. I 25 sottogruppi raccolti rappresentano, quindi, pochi minuti e in questo intervallo non ci sono cambiamenti rilevanti. Visto che il processo non cambia significativamente, allora la frequenza di raccolta dati può essere diminuita. L'importante è raccogliere dati abbastanza frequentemente da rilevare i cambiamenti importanti, ma non così frequentemente da rendere il costo proibitivo.
La frequenza di campionamento dovrebbe riflettere la frequenza con cui il processo va fuori controllo.

Per formare i sottogruppi, occorre tener conto di alcuni punti:

1. ogni sottogruppo deve essere omogeneo - significa che ogni sottogruppo dovrebbe essere composto da misure rilevate in tempi e luoghi analoghi. Questo significa prendere misure di prodotti fabbricati consecutivamente o dalla stessa macchina;

2. le misure di un sottogruppo devono essere indipendenti le une dalle altre - significa che ogni misura nel sottogruppo non deve essere influenzata dalle altre. Se prendo la misura in 5 punti dell'autoclave, queste sono indipendenti condizionatamente alla temperatura globale.

3. aumentare la numerosità del sottogruppo rende le carte di controllo più sensibili a spostamenti della media - generalmente i sottogruppi hanno da 1 a 10 elementi. Più aumenta il sottogruppo e più è sensitiva la $\bar{X}$ chart a cambiamenti nella media, ma diventa meno efficiente il range come stima della variabilità del processo. Generalmente, quando n è 10 o più, la deviazione standard campionaria è migliore per la stima della variabilità del processo.

Se le misure sono eccessive nel tempo, allora sarà compromessa l'omogeneità (misure distanti nel tempo non sono omogenee).

6 Carta $\bar{X}$, s

Molte caratteristiche di qualità possono essere espresse in termini di una misura numerica. Una caratteristica misurabile (come ad es. un peso, una lunghezza, una temperatura, ecc.) è detta variabile. Quando si tratta una variabile è necessario monitorare sia il suo valor medio che la sua variabilità.

Abbiamo visto che la variabilità può essere misurata tramite la deviazione standard o il range. Il range si utilizzava in passato quando non c'era largo uso dei computer, per facilità di calcolo, e rappresenta una buona misura della variabilità solo quando i sottogruppi sono formati da un piccolo numero di elementi. Oggi si preferisce utilizzare la deviazione standard come misura della variabilità sia per sottogruppi di dimensione grande che piccola.

La carta della media è usata per monitorare e rilevare cambiamenti nella media di una singola caratteristica. I punti disegnati rappresentano le medie dei sottogruppi. La carta s è utilizzata per monitorare e rilevare cambiamenti nella deviazione standard di una singola caratteristica. I punti disegnati rappresentano la deviazione standard campionaria di ogni sottogruppo.

Quindi, nella carta $\bar{X}$ si disegneranno le medie campionarie dei sottogruppi:

$$\bar{X}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad \text{per il } j\text{-mo sottogruppo}$$

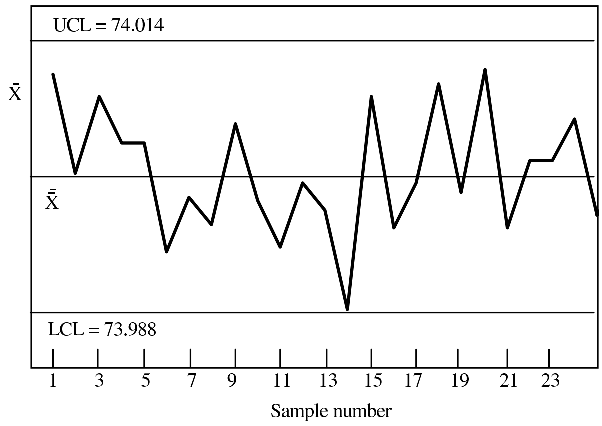
e nella carta s si disegneranno le deviazioni standard dei sottogruppi:

$$s_j = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{X}_j\right)^2}{n-1}} \qquad \text{per il } j\text{-mo sottogruppo}$$

Quando il processo è in controllo, le osservazioni sono indipendenti e identicamente distribuite normali con media μ e varianza σ^2: $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

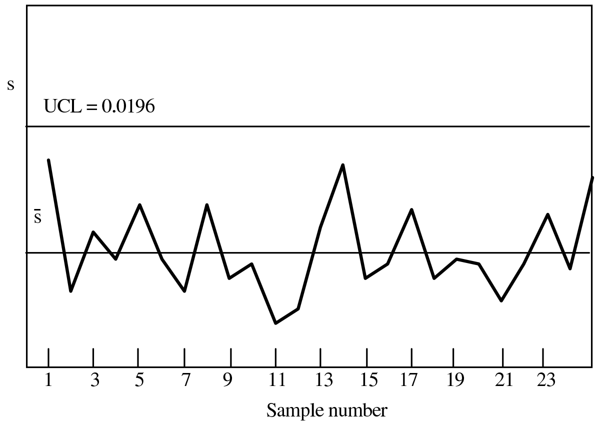
Costruzione di una carta $\bar{X}$

- Calcolare una stima $\bar{\bar{X}}$ della media μ e una stima $\hat{\sigma}_{\bar{X}}$ della deviazione standard degli $\bar{X}_j$. Per far questo è necessario disporre di almeno 25 sottogruppi di numerosità $n \geq 4$;
- tracciare la centerline $\bar{\bar{X}}$;
- calcolare e tracciare i limiti di controllo $\bar{\bar{X}} \pm 3\hat{\sigma}_{\bar{X}}$.



Costruzione di una carta s

- Calcolare una stima $\bar{s}$ della media degli s_j e una stima $\hat{\sigma}_s$ della deviazione standard degli s_j.
- tracciare la centerline $\bar{s}$;
- calcolare e tracciare i limiti di controllo $UCL_s = \bar{s} + 3\hat{\sigma}_s$, $LCL_s = \max\{0, \bar{s} - 3\hat{\sigma}_s\}$.



In entrambi i casi i limiti di controllo sono dati dalla media ± 3 volte la deviazione standard. Carte di questo tipo (e più in generale carte in cui i limiti di controllo sono dati dalla media $\pm L$ volte la deviazione standard) si dicono **carte di controllo di Shewart**, perché inizialmente proposte da Walter S. Shewart.

Più precisamente per costruire la carta di controllo $\bar{X}$, s utilizzeremo le seguenti formule pratiche:

- per le centerline:
  - per la carta $\bar{X}$

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\sum_{j=1}^{k} \bar{X}_j}{k} \qquad \text{media campionaria delle medie campionarie}$$

  - per la carta s

$$\bar{s} = \frac{\sum_{j=1}^{k} s_j}{k} \qquad \text{media campionaria delle SD campionarie}$$

- per i limiti di controllo:
  - per la carta $\bar{X}$

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}} = \frac{\bar{s}/c_4}{\sqrt{n}}$$

    dove c_4 è una costante che serve per la non polarizzazione dello stimatore $\bar{s}/c_4$ (sia $\hat{\theta}$ uno stimatore del parametro θ; $\hat{\theta}$ si dice non polarizzato o non distorto se $E(\hat{\theta}) = \theta$).
  - per la carta s

$$UCL_s = B_4\,\bar{s} \quad ; \quad LCL_s = B_3\,\bar{s}$$

    dove B_3 e B_4 sono costanti che derivano dal fatto che $\bar{s}/c_4$ è uno stimatore non polarizzato di σ.

Le costanti c_4, B_3 e B_4 si trovano nella seguente tabella (sotto ipotesi di gaussianità)

Tabella 1: Costanti per carte di controllo (ipotesi di gaussianità)

n	c_4	B_3	B_4
2	0.7979	0	3.267
3	0.8862	0	2.568
4	0.9213	0	2.266
5	0.9400	0	2.089
6	0.9515	0.030	1.970
7	0.9594	0.118	1.882
8	0.9650	0.185	1.815
9	0.9693	0.239	1.761
10	0.9727	0.284	1.716

Vantaggi delle carte $\bar{X}$, s:

- assieme alle carte $\bar{X}$, R, sono le carte fondamentali e più diffuse;
- separano le variazioni nella media da quelle nella deviazione standard;
- la carta s è migliore della R perché per sottogruppi numerosi ($n \geq 5$) il range scarta molta informazione, in quanto solo i valori minimo e massimo dei sottogruppi vengono usati per stimare la variabilità
- sono efficienti nell'individuare salti improvvisi della media.

Svantaggi delle carte $\bar{X}$, s:

- è necessaria una carta separata per ogni variabile;
- servono sottogruppi omogenei;
- piccoli cambiamenti e spostamenti della media possono essere individuati più efficacemente da una carta di controllo EWMA (Exponentially Weighted Moving Average) (a media mobile esponenziale).

7 Interpretazione di alcuni tipi carte di controllo

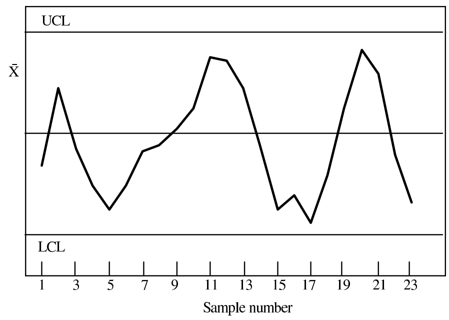
Vediamo alcuni andamenti che si possono incontrare nelle carte di controllo. Anche se non ci sono punti fuori dai limiti di controllo, ci possono essere andamenti caratteristici dei dati che hanno valore di diagnostica (tipo le Western Electric Rules).

Osservazione:

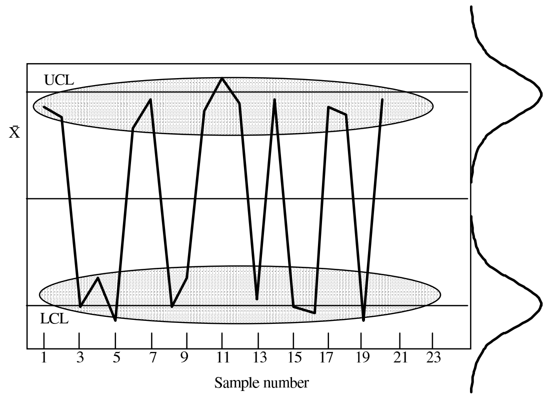
- se sia $\bar{X}$ che s sono fuori controllo, la strategia migliore è eliminare prima le cause speciali di s (spesso questo sistema anche la carta di controllo $\bar{X}$);
- mai tentare di interpretare la carta di controllo $\bar{X}$ quando la s è fuori controllo.

Tipi di andamenti che si possono incontrare: cicli, misture (o mescole), shift, trend, stratificazione.

- I **cicli** appaiono occasionalmente nelle carte di controllo. Tali andamenti possono essere dovuti a variazioni esterne periodiche (temperature, turni di lavoro, manutenzione, ecc.

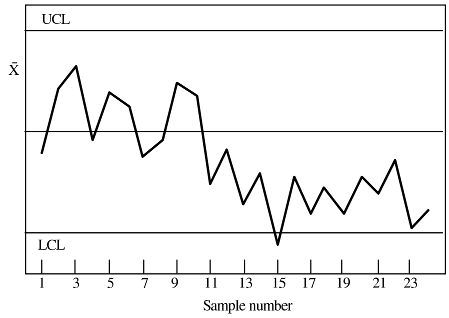


- **Misture (o mescole)**: si hanno molti punti ai bordi (intorno ai limiti di controllo) e pochi al centro (intorno alla centerline).

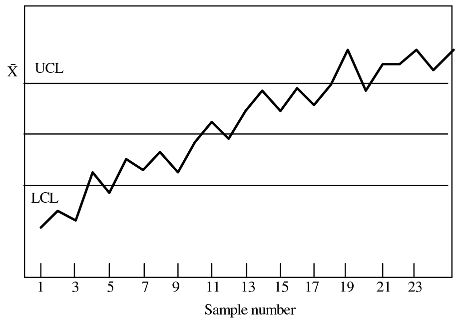


  Un andamento di questo tipo è generato da due o più distribuzioni sovrapposte che generano l'output. Deriva da eterogeneità <u>tra</u> i sottogruppi (ad es. gli output sono prodotti da macchine parallele) o da sovraregolazione (quando gli operatori fanno aggiustamenti troppo spesso).

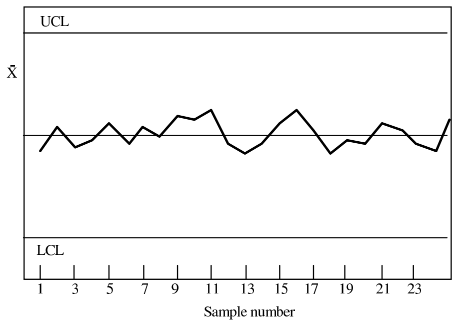
- **Shift**: è dovuto a cambiamenti in macchine, materiali, operatori, cambiamenti nel metodo di ispezione.



- **Trend**: (movimento continuo in una direzione) è dovuto al logorio di un componente oppure a stagionalità di lungo periodo (come la temperatura), oppure a cause umane come l'affaticamento di un operatore.



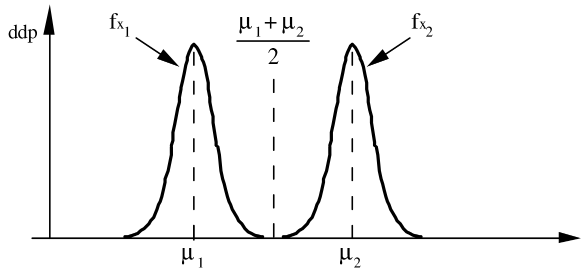
- **Stratificazione**: tendenza dei punti ad accumularsi attorno alla centerline. Denota una mancanza di variabilità naturale.



Può essere dovuta ad un calcolo non corretto dei limiti di controllo, eterogeneità nei sottogruppi (sottogruppi non omogenei che pescano da più distribuzioni indipendenti). Ad es. un campione di dimensione 5 è ottenuto prendendo le misurazioni da 5 processi paralleli. Se i punti sono molto dispersi, allora la deviazione standard è grande e quindi i limiti di controllo sono distanti.

Supponiamo che 2 dati siano estratti da due distribuzioni diverse.

$$\bar{X} = \frac{(X_1 + X_2)}{2}$$



con X_1 e X_2 indipendenti, non necessariamente identicamente distribuite.

Si ha che

$$E(\bar{X}) = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \quad ; \quad var(\bar{X}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{4}$$

e $var(\bar{X})$ è piccola se σ_1 e σ_2 sono piccole. In questo caso anche $\sigma_{\bar{X}}$ è piccola. Tuttavia,

$$s = \sqrt{\frac{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2}{2-1}}$$

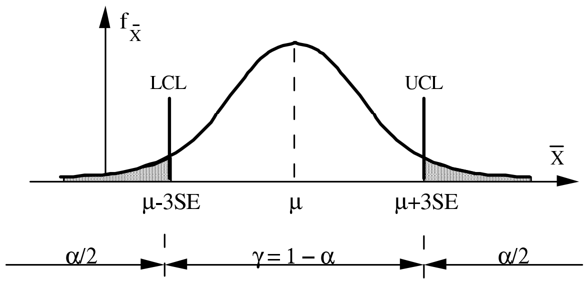
è grande se $|\mu_1 - \mu_2|$ è grande. Ne consegue che $\hat{\sigma}_{\bar{X}}$ (basata su s) è grande e quindi i limiti di controllo sono grandi.

8 Falso allarme e mancato allarme

Sia

$$\alpha = P(\text{falso allarme}) = P(\text{allarme}|\text{processo in controllo}).$$

Se il processo è in controllo, $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$. In questo caso i limiti di controllo sono $\bar{\bar{X}} \pm 3\hat{\sigma}_{\bar{X}}$ e $\alpha = 0.0027$ (è la probabilità che un punto cada fuori dai limiti di controllo).

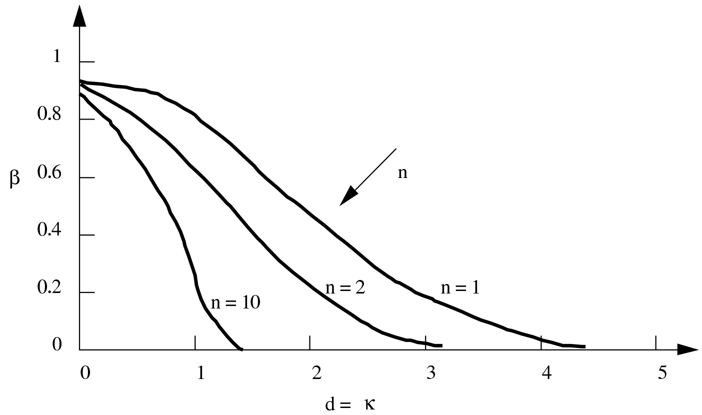


Sia

$$\beta = P(\text{mancato allarme}) = P(\text{no allarme}|\text{processo fuori controllo})$$

Supponiamo di avere una carta $\bar{X}$ con deviazione standard σ nota e costante. Se la media trasla dal valore in controllo μ_0 al valore $\mu_0 + k\sigma$, allora β = probabilità che una traslazione della media pari a $k\sigma$ non venga segnalata al primo campione dopo la traslazione $= P\left(LCL \leq \bar{X} \leq UCL|\mu = \mu_0 + k\sigma\right) = \Phi(3 - k\sqrt{n}) - \Phi(-3 - k\sqrt{n})$.

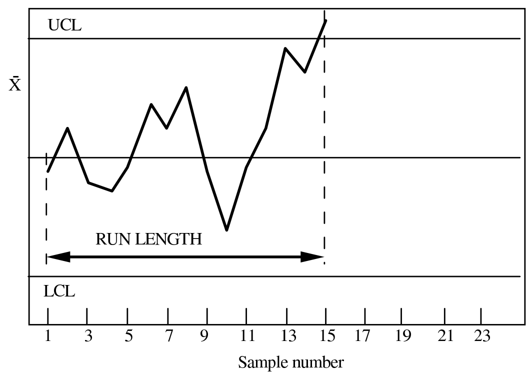
La carta OC (Operating-characteristic Curve) si ottiene disegnando il rischio β in funzione di k.



- Per n fissato: se k cresce $\Rightarrow$ β decresce.
- Per k fissato: se n cresce $\Rightarrow$ β decresce.
- Fissati k e β $\Rightarrow$ si trova n.

Per n basso (fino a 5-6) la carta $\bar{X}$ non è particolarmente efficiente nel rilevare piccole traslazioni della media al primo campione dopo la traslazione.

Legato a queste probabilità (α e β) è l'ARL (Average Run Length) cioè il numero medio di punti che vengono disegnati sulla carta prima che venga segnalato un fuori controllo.



L'ARL sarà lungo quando il processo è in controllo e piccolo quando il processo è fuori controllo.

Esempio. Consideriamo una carta di controllo di Shewart con i limiti $\pm 3\sigma_{\bar{X}}$. Se il processo è in controllo, per ogni singolo punto si ha:

$$P(\text{falso allarme}) = P(|\bar{X} - \bar{\bar{X}}| > 3\sigma_{\bar{X}}) = 0.0027 = \frac{1}{370}.$$

Allora avremo in media un falso allarme ogni 370 punti.
In generale, avremo:

- per un processo in controllo, con $\alpha = P(\text{falso allarme})$:

$$ARL = \frac{1}{\alpha}$$

- per un processo fuori controllo, con $\beta = P(\text{mancato allarme})$:

$$ARL = \frac{1}{1-\beta}.$$

Questo risultato è abbastanza ovvio. Se le osservazioni plottate sulla carta di controllo sono indipendenti, allora il numero di punti che devono essere disegnati fino a che il primo punto esce dai limiti di controllo è una variabile geometrica con parametro α nel primo caso e $1-\beta$ (probabilità che lo shift venga rilevato al primo campione dopo che è avvenuto) nel secondo. La media di una variabile aleatoria geometrica di parametro p è $1/p$, cioè l'ARL. Quindi la distribuzione del "run lenght" per una carta di controllo di Shewart è una distribuzione geometrica. Ne consegue che la deviazione standard del "run length" è alta e quindi la media può essere molto diversa dal valore "tipico" del "run length".

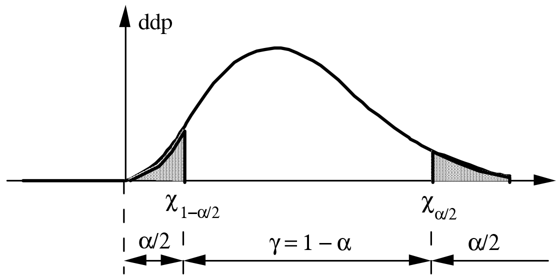
Nell'esempio di prima la deviazione standard del "run length" è:

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{1-\alpha} \simeq 370.$$

Quindi, in questo caso, la deviazione standard è uguale alla media.

Osservazioni

- C'è chi usa $\alpha = 0.002$, allora in questo caso i limiti di controllo sono $\bar{\bar{X}} \pm 3.09\hat{\sigma}_{\bar{X}}$.
- La densità di probabilità della deviazione standard campionaria non è gaussiana e neppure simmetrica (se le osservazioni sono gaussiane, indipendenti e identicamente distribuite, allora è χ^2).

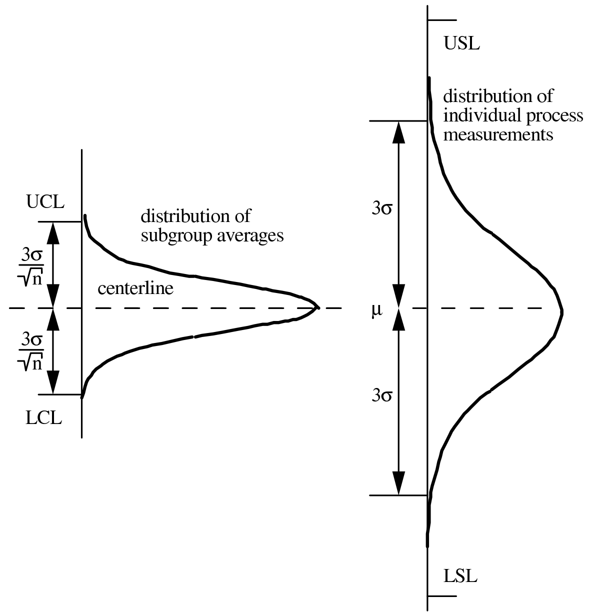


In questo caso, invece di usare i limiti di controllo $\bar{s} \pm 3\hat{\sigma}_{\bar{s}}$, si può imporre il valore di α e ricavare i limiti asimmetrici.

- A volte come centerline si usa il target ($\frac{USL+LSL}{2}$) al posto di $\bar{\bar{X}}$:
  - è utile solo se è possibile regolare con facilità la media del processo;
  - quando ci sono dei fuori controllo non si sa se è colpa di una causa speciale o della scelta della centerline.
- I limiti di specifica non compaiono sulla carta di controllo.

  I limiti di controllo si riferiscono alle medie campionarie dei sottogruppi e non alle singole osservazioni.

  Quando si utilizzano plot delle osservazioni individuali, è possibile plottare i limiti di specifica sulla carta.



Non c'è nessuna relazione matematica o statistica tra limiti di controllo e limiti di specifica.

9 Violazione delle ipotesi

Le ipotesi che abbiamo fatto sul processo “in controllo” sono:

- gaussianità (istogramma dei dati gaussiano);
- indipendenza e identica distribuzione (le misure sono variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite).

È verosimile che le ipotesi non siano perfettamente vere, però non è il caso di buttare tutta la trattazione vista. G.E.P. Box diceva che “tutti i modelli sono sbagliati, alcuni sono utili”. Quindi l’approccio realistico consiste in:

- saper verificare la validità delle ipotesi;
- conoscere la robustezza dei metodi rispetto a moderate violazioni delle ipotesi;
- conoscere rimedi e/o alternative.

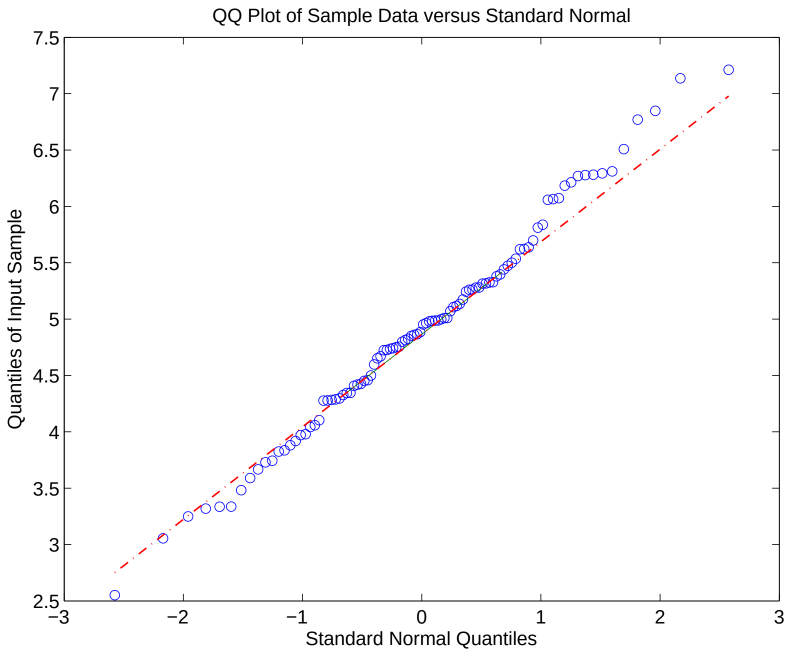
GAUSSIANITÀ

- Come verificarla?
  - “Quantile plot” (o Q-Q plot)

    È un metodo grafico per mettere a confronto i quantili di due distribuzioni. Sull’asse delle ascisse si mettono i quantili di una distribuzione e sull’asse delle ordinate i quantili della seconda distribuzione. Se le due distribuzioni sono simili, i punti del Q-Q plot si troveranno intorno alla retta $y = x$. Se le distribuzioni hanno una relazione lineare, allora i punti saranno disposti intorno a una retta, ma non necessariamente $y = x$.

    Nel nostro caso il Q-Q plot viene utlizzato per confrontare la distribuzione dei dati con la normale. Disegnando sull’asse delle ascisse i quantili della distribuzione campionaria e sull’asse delle ordinate i quantili di una normale, se si ottengono i punti intorno alla retta $y = x$, allora si può dire che i dati sono approssimativamente gaussiani. Inoltre, possiamo dire che è sufficiente calcolare i quantili empirici e confrontarli con i quantili della normale standard. Se i punti rappresentanti le coppie di quantili si dispongono lungo una retta, la pendenza e l’intercetta di tale retta forniscono un’informazione sul valore di σ e μ rispettivamente.
  - Skewness e kurtosis

    Se la skewness (che misura la deviazione della distribuzione dalla simmetria) è molto diversa da 0, allora la distribuzione è asimmetrica, mentre la distribuzione normale è perfettamente simmetrica (e ha skewness uguale a 0). Se la kurtosis (che serve per rilevare quanto una curva è appiattita o appuntita) è differente da zero, allora la distribuzione è molto piatta oppure ha un forte picco rispetto alla normale (per la distribuzione normale la kurtosis è 0).



- Test di ipotesi per la verifica della normalità

- Cause di non gaussianità:
  - alcune variabili aleatorie sono intrinsecamente non gaussiane;
  - dati eterogenei campionati da più gaussiane (in questo caso la densità di probabilità è una mistura di gaussiane).

MISTURA DI DISTRIBUZIONI

Date due variabili aleatorie V e W, sia

$$X = \begin{cases} V & \textit{con probabilità} \quad p \\ W & \textit{con probabilità} \quad 1-p \end{cases}$$

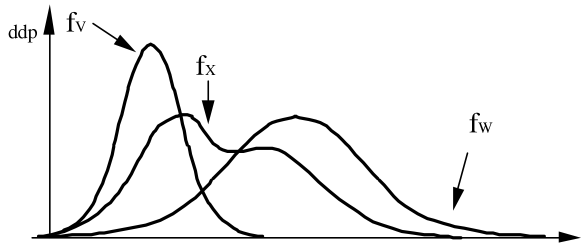
(cioè X è ottenuta campionando da due distribuzioni diverse).
Com'è fatta $f_X(x)$?
Per il teorema della probabilità totale

$$F_X(x) = P(X \le x) = P(X \le x | X = V)p + P(X \le x | X = W)(1-p).$$

Da cui segue

$$f_X(x) = f_V(x)p + f_W(x)(1-p).$$

Molte variabili aleatorie lognormali in realtà sono una mistura di gaussiane (dati eterogenei).



Che cosa succede se è violata la gaussianità?

In molte situazioni si può aver ragione di dubitare della validità di questa ipotesi. Se si conosce la forma della distribuzione è possibile derivare la distribuzione campionaria di $\bar{X}$ e s e ottenere i limiti di probabilità esatti per le carte di controllo. Questo approccio può presentare difficoltà in alcuni casi, oppure non si conosce la distribuzione esatta, allora si preferisce utilizzare l'approccio standard basato sulle assunzioni di normalità se si pensa che gli effetti dovuti a questa approssimazione non producano grossi cambiamenti sulle carte di controllo.

Molti autori hanno studiato gli effetti dovuti alla perdita di gaussianità sulle carte di controllo. Gli usuali limiti di controllo ottenuti nel caso normale, per la carta $\bar{X}$, sono robusti rispetto alle assunzioni di normalità e possono essere usati a meno che la popolazione sia estremamente non normale. In molti casi, campioni di dimensione 4 o 5 sono sufficienti per assicuare robustezza rispetto all'assunzione di normalità. Le carte R e s invece sono più sensibili alla non gaussianità dei dati (quindi si ha scarsa robustezza della densità di probabilità della varianza campionaria).

Se si perde la gaussianità, allora le probabilità α e β di falso allarme e mancato allarme (rispettivamente) non sono più quelle viste in precedenza. Potrebbe, ad es., aumentare la probabilità di falsi allarmi e, se la ricerca delle cause speciali è costosa, un aumento dei falsi allarmi fa aumentare i costi.

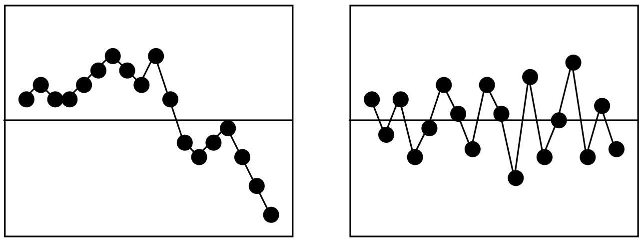
Che cosa fare se viene meno la gaussianità?

Si potrebbero trasformare i dati (ad es., se si hanno misure da una lognormale, allora facendo il logaritmo si ottiene una gaussiana). Però questo non è sempre facile e le nuove variabili potrebbero non avere interpretazione fisica. Oppure si può stimare la forma della densità di probabilità e calcolare i limiti di probabilità; questo però è oneroso. Oppure si usa una carta di controllo EWMA che è meno senisibile alla non gaussianità.

INDIPENDENZA E IDENTICA DISTRIBUZIONE

- Come verificarla?
  - Esame della serie temporale delle osservazioni: vedere se ci sono cicli o trend;
  - cambi di segno: se le osservazioni sono indipendenti ed identicamente distribuite, allora la differenza rispetto alla media dovrebbe cambiare di segno mediamente una volta su due. Se si hanno permanenze troppo lunghe sopra o

sotto la media, allora si ha correlazione positiva tra campioni successivi; se ci sono cambi di segno quasi ad ogni passo, allora si ha correlazione negativa tra campioni successivi;

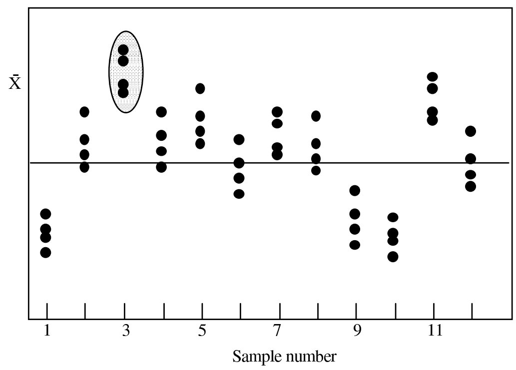


  - Test statistici (per es. test sui cambi di segno).

- Cause di non indipendenza e identica distribuzione
  - derive e ciclicità nella media dovute a usura e piani di manutenzione;
  - ci sono sorgenti di variabilità in comune tra punti successivi anche quando il processo è in controllo (ad es. operatore)

Cosa succede se è violata l'indipendenza e identica distribuzione?

Se le misure all'interno del sottogruppo sono correlate positivamente, allora la deviazione standard di $\bar{X}_j$ risulta sottostimata. Di conseguenza i limiti di controllo sono troppo stretti e si hanno troppi falsi allarmi.



Cosa fare se viene meno l'indipenza e indentica distribuzione?

- se si ha mancanza di indipendenza tra sottogruppi, allora si possono utilizzare delle carte di controllo per dati correlati oppure un run-to-run control;

- se si ha mancanza di indipendenza nei sottogruppi, allora si può utilizzare una carta X rinunciando ai sottogruppi, oppure una carta X delle medie (cioè si fanno le medie dei sottogruppi e poi si buttano i sottogruppi considerando i dati come individuali) o una carta multivariata.

10 Carta X, "MOVING RANGE"

In molti casi non è possibile creare dei sottogruppi nemmeno raggruppando osservazioni consecutive. Ad esempio, se non è possibile avere osservazioni multiple allo stesso istante e due osservazioni consecutive distano molto nel tempo, allora non è possibile creare sottogruppi omogenei. In questo caso, per monitorare la media, si utilizza una carta X in cui si disegnano le singole osservazioni $X_i = x_i$; mentre per monitorare la variabilità si utilizza una carta "moving range" in cui si disegnano i range tra due osservazioni consecutive:

$$MR_i = |x_i - x_{i-1}| \, .$$

Al solito, quando il processo è in controllo, si suppone che le osservazioni siano indipendenti ed identicamente distribuite $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Costruzione di una carta X

- Calcolare una stima $\bar{X}$ della media μ e una stima $\hat{\sigma}$ della deviazione standard del processo (è bene usare un numero grande di osservazioni e comunque non inferiore a 100);
- tracciare la centerline $\bar{X}$;
- calcolare e tracciare i limiti di controllo $\bar{X} \pm 3\hat{\sigma}$.

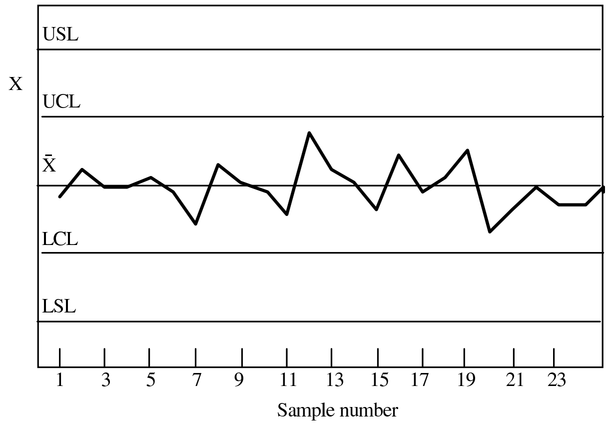
Costruzione di una carta MR

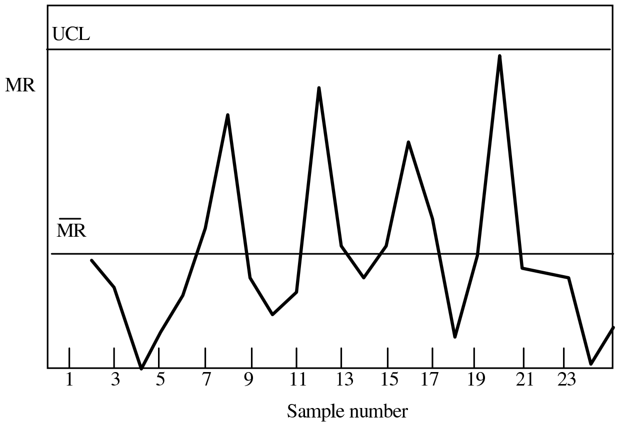
- Calcolare una stima $\overline{MR}$ del range medio tra osservazioni successive e anche una stima $\hat{\sigma}_{MR}$ della deviazione standard degli MR_i;
- tracciare la centerline $\overline{MR}$;
- calcolare e tracciare i limiti di controllo

$$UCL_{MR} = \overline{MR} + 3\hat{\sigma}_{MR} \qquad ; \qquad LCL_{MR} = \max\left\{0, \overline{MR} - 3\hat{\sigma}_{MR}\right\} .$$

Per costruire la carta di controllo X, MR utilizzeremo le seguenti formule pratiche:

- per le centerline:
  - per la carta X
  $$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad \text{media campionaria}$$
  - per la carta MR
  $$\overline{MR} = \frac{\sum_{i=2}^{n} MR_i}{n-1} \qquad \text{media campionaria dei "moving range"}$$





- per i limiti di controllo:
  - per la carta X
    $$\hat{\sigma} = \frac{\overline{MR}}{1.128} \qquad \text{oppure} \qquad \hat{\sigma} = s \text{ (SD campionaria)}$$
  - per la carta MR
    $$LCL_{MR} = 0 \qquad ; \qquad UCL_{MR} = 3.267\,\overline{MR}$$
    dove questi valori sono ottenuti utilizzando le formule dei limiti di controllo visti per la range chart $LCL = D_3\,\overline{MR}$ e $UCL = D_4\,\overline{MR}$ e le costanti D_3 e D_4 sono in tabella ($D_3 = 0$ e $D_4 = 3.267$).

Sotto ipotesi di gaussianità, il secondo stimatore di σ ($\hat{\sigma} = s$) ha varianza 1.65 volte minore rispetto al primo ($\hat{\sigma} = \overline{MR}/1.128$), ma è meno robusto se usato in presenza di molti fuori controllo (situazione che si potrebbe presentare nella fase I, quando si porta il processo in controllo). In questo caso, si può usare il primo stimatore di σ per portare il processo in controllo e poi il secondo per calcolare i limiti di controllo della carta X.

A partità di $\alpha = P(\text{falso allarme})$, la carta X ha un $\beta = P(\text{mancato allarme})$ maggiore di una carta $\bar{X}$ con sottogruppi. Allora, se è possibile scegliere tra carta X e carta $\bar{X}$ (quando le ipotesi sono soddisfatte), è bene scegliere la carta $\bar{X}$.

Violazione delle ipotesi

- Gaussianità: se il processo si sposta anche di poco dalla normalità, i limiti di controllo possono essere del tutto inappropriati. In questo caso sarebbe necessario ricalcolare i limiti di controllo partendo dalla distribuzione corretta (ma questo può essere molto complicato). Quindi è fondamentale controllare l'assunzione di normalità quando si usa una carta per individui, inoltre le carte di Shewart per individui devono essere utilizzate con estrema cautela. Di conseguenza, possiamo dire che la gaussianità è più critica nelle carte X che nelle carte $\bar{X}$.

- Indipendenza: è meno critica perché, al crescere di n, la stima $\hat{\sigma} = s$ converge a σ (stimatore consistente). Ne consegue che è importante usare un numero elevato di osservazioni per il calcolo dei limiti. Il numero elevato di osservazioni però non allevia l'eventuale non gaussianità, perché i punti della carta X non sono il risultato di medie.

Serve la carta MR?

I punti della carta MR sono correlati, quindi è di difficile interpretazione. Questa correlazione spesso dà luogo a cicli sulla carta. In più è correlata con la carta X e perciò non dà informazioni addizionali. Comunque, Montgomery sostiene che se l'analista è attento nell'interpretazione e si basa principalmente sulla carta X, pochi problemi derivano dal plottare entrambe le carte.

Vantaggi delle carte X, MR:

- la carta X è facile da capire e implementare;
- sulla carta X compaiono anche i limiti di specifica;
- i punti possono essere disegnati sulla carta non appena si ottiene una nuova osservazione;
- pur di aver usato abbastanza osservazioni nella fase I, funzionano anche quando il processo in controllo produce osservazioni non indipendenti.

Svantaggi delle carte X, MR:

- sono inferiori ad una carta $\bar{X}$ (se le ipotesi di applicabilità di questa sono soddisfatte);
- sono sensibili all'ipotesi di gaussianità;
- sono poco pronte a identificare rapidamente piccole variazioni nella media o nella deviazione standard;

- le carte X, MR non separano la variazione nella media da quella nella deviazione standard.

In conclusione si può riassumere che:

- la carta $\bar{X}$ è robusta verso la gaussianità e poco robusta verso l'indipendenza;
- la carta s è poco robusta verso gaussianità e indipendenza;
- la carta X è meno potente di $\bar{X}$, poco robusta verso la gaussianità, robusta verso l'indipendenza.